

§2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE.

Die Diskussion der grundlegenden Konzepte lehnen wir zunächst an gewöhnliche Petri-Netze an.

Definition 2.1. Ein gewöhnliches Petri-Netz ist ein Tupel $\mathcal{P} = (S, T, \xi)$ mit folgenden Komponenten und Eigenschaften:

- (PN1) $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ist eine endliche Menge von Stellen;
- (PN2) $T = \{t_1, \dots, t_l\}$ ist eine endliche Menge von Transitionen;
- (PN3) $S \cap T = \emptyset$;
- (PN4) $\xi: (S \times T) \cup (T \times S) \rightarrow \mathbb{N}^1$ ist eine Kantenabbildung.

Das Abbild eines solchen Tupels ist ein gerichteter Graph, mit Stellen und Transitionen als Knoten, sowie beschrifteten Kanten von Stellen zu Transitionen und vice versa. Die Kantenbeschriftung symbolisiert die sog. Kantenvielfachheit, die die Abbildung aus (PN4) beinhaltet. Kanten mit $\xi(\cdot, \cdot) = 0$ sind als nicht existent anzusehen.

Eine Transition t kann Ein- und Ausgangsstellen haben (es gilt entsprechend $\xi(s, t) > 0$, bzw. $\xi(t, s) > 0$). Stellen, die gleichzeitig Ein- und Ausgangsstellen für eine Transition sind, nennen wir kontrollierende Stellen. Es kann zusätzlich gefordert werden, daß das Petri-Netz solche Stellen nicht enthält. Es gilt dann:

$$(PN^*) \quad \forall s \in S, t \in T: \xi(s, t) = 0 \vee \xi(t, s) = 0.$$

Ein Petri-Netz ist demnach ein rein statisches Gebilde. Dynamische Eigenschaften werden ihm erst durch die sog. Markierung verliehen (wir sprechen vom markierten Petri-Netz):

$$(PN5) \quad m: S \rightarrow \mathbb{N}.$$

Diese Markierung fixiert einen Zustand vom gegebenen Petri-Netz und kann nach bestimmten Regeln, sog. Schaltregeln, verändert werden. Der Zustandsüberführungsvorgang bleibt nur den sog. aktivierten Transitionen vorbehalten.² Eine Transition $t \in T$ ist aktiviert (auch schaltbar), wenn gilt:

¹ \mathbb{N} bedeutet die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen.

² Folglich kann keine Zustandsveränderung eintreten, wenn keine Transition aktiviert ist. Das Petri-Netz befindet sich in einem "toten" Zustand (deadlock, [5]). Siehe auch §1.

§2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

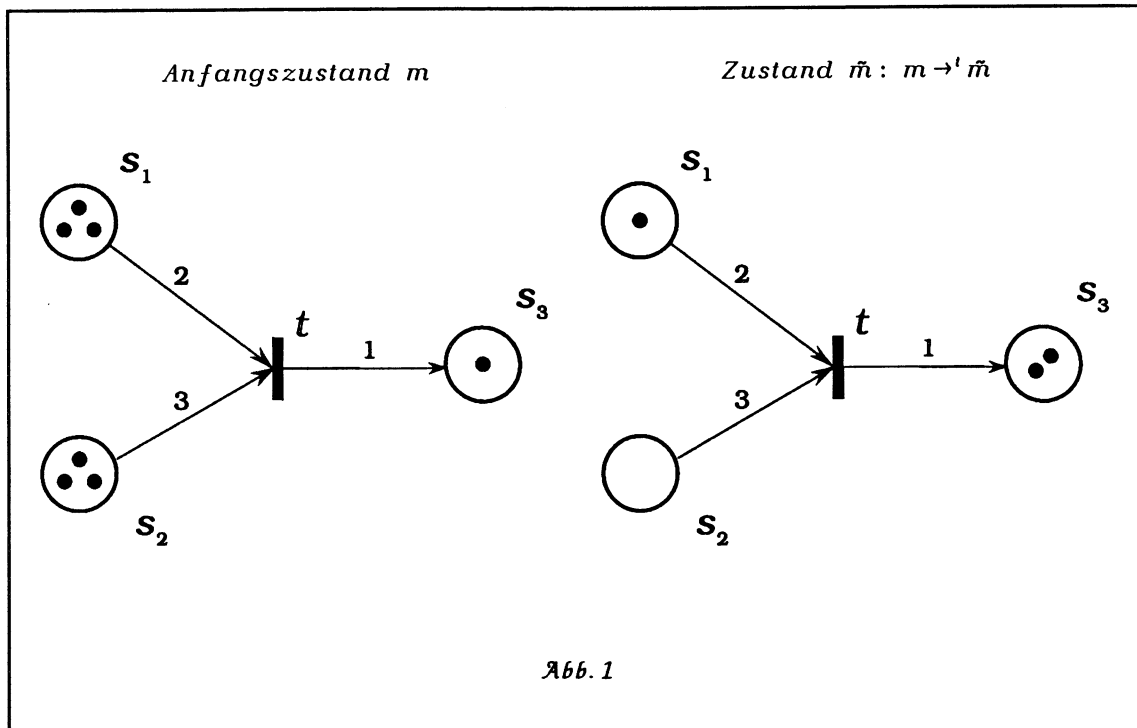
$$\forall s \in S: m(s) - \xi(s, t) \geq 0.$$

Schaltregel für gewöhnliche Petri-Netze: *Feuert eine aktivierte Transition t im Zustand m und ist der Zustand nach dem Schaltvorgang \bar{m} (formal: $m \rightarrow^t \bar{m}$), dann gilt:*

$$\bar{m}(s) = m(s) + \xi(t, s) - \xi(s, t) \text{ für alle } s \in S.$$

Den Schaltvorgang demonstrieren wir anhand eines einfachen Beispiels. Die Abb. 1 zeigt ein Petri-Netz, bestehend aus drei Stellen s_1, s_2, s_3 (dargestellt durch Ringe)³ und einer Transition t (dargestellt durch einen Balken), mit folgender Kantenabbildung:

$$\xi(k_1, k_2) = \begin{cases} 3 & \text{falls } k_1 = s_2 \wedge k_2 = t, \\ 2 & \text{falls } k_1 = s_1 \wedge k_2 = t, \\ 1 & \text{falls } k_1 = t \wedge k_2 = s_3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



³ Keine dieser Stellen ist kontrollierend - (PN*) ist damit erfüllt.

§2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

Den Zustand (Markierung) des Petri-Netzes pflegen wir durch direktes Einzeichnen der Marken⁴ in die Stellen zu kennzeichnen, wobei die Anzahl der Marken, die eine Stelle s enthält, mit $m(s)$ zu identifizieren ist. Der Anfangszustand (Abb. 1 links) ist demnach $m = (3, 3, 1)$, der Endzustand (Abb. 1 rechts) $\bar{m} = (1, 0, 2)$. Bildhaft gesprochen, wandern die Marken von den Eingangsstellen hinüber auf die Ausgangsstellen unter Berücksichtigung der Kantenvielfachheiten. Ein nochmaliges Feuern von t ist mangels Marken auf den Eingangsstellen nicht mehr möglich (t ist nicht mehr aktiviert).

Im allgemeinen werden aber offensichtlich auch weitere Schaltvorgänge möglich sein - insbesondere durch andere Transitionen. Derartige Schaltfolgen sind vor allem im Hinblick auf das bereits angesprochene Erreichbarkeitsproblem von besonderem Interesse für uns. Sei T^* die Menge aller Wörter über dem (endlichen) Alphabet T , zusammen mit dem leeren Wort λ (T^* ist damit ein Monoid hinsichtlich der Konkatenation). Unter einer Transitionenfolge verstehen wir jedes Element $\tau \in T^*$.

Sei $\tau = (t_{j(1)}, \dots, t_{j(k)}) \in T^*$ mit $j(i) \in \{1, \dots, l\}$, $1 \leq i \leq k$. Zunächst müssen wir sicherstellen, daß bei der Umsetzung einer solchen Transitionenfolge nur die augenblicklich aktivierten Transitionen feuern würden. Wir sprechen von einer zulässigen Transitionenfolge (auch Schaltfolge) zu gegebenem Zustand m , wenn gilt:

$$\forall s \in S, i \in \{1, \dots, k\}: \left[m(s) + \left(\sum_{v=1}^{i-1} [\kappa(t_{j(v)}, s) - \kappa(s, t_{j(v)})] \right) - \kappa(s, t_{j(i)}) \right] \geq 0.$$

Da jede Schaltfolge eine Art zusammengesetzter Transition ist, können wir die erweiterte Schaltregel für gewöhnliche Petri-Netze folgendermaßen angeben: Feuert eine Schaltfolge $\tau = (t_{j(1)}, \dots, t_{j(k)}) \in T^*$ im Zustand m und ist der Zustand nach dem Schaltvorgang \bar{m} (formal: $m \rightarrow^\tau \bar{m}$), dann gilt:

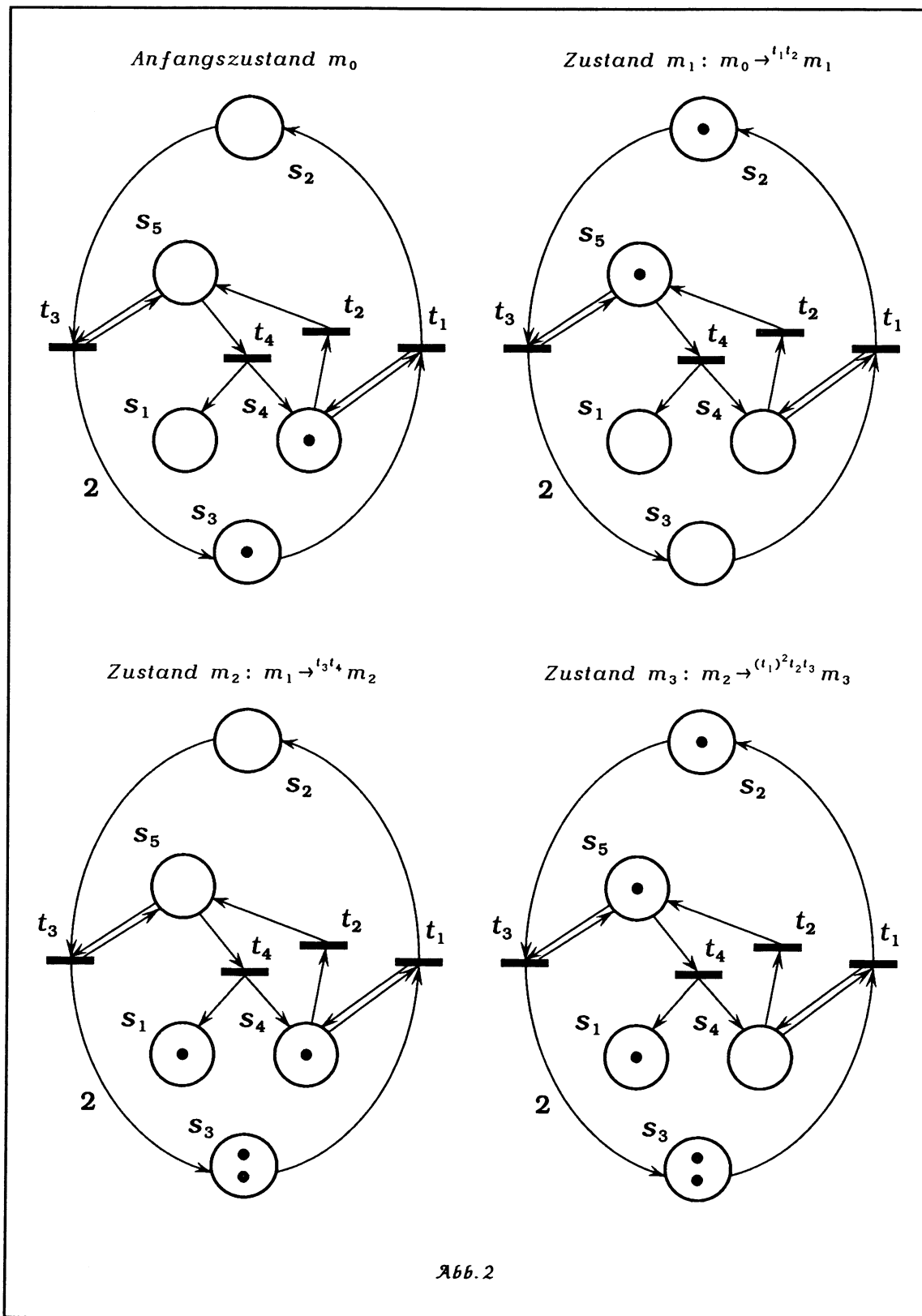
$$\bar{m}(s) = m(s) + \sum_{v=1}^k [\kappa(t_{j(v)}, s) - \kappa(s, t_{j(v)})] \text{ für alle } s \in S.$$

Abrunden wollen wir unsere bisherigen Überlegungen durch ein Beispiel, auf das wir noch öfters in dieser Arbeit verweisen werden.⁵ Abb. 2 schildert die Zustandsveränderung eines Petri-Netzes beim Feuern der (zulässigen) Schaltfolge $t_1 t_2 t_3 t_4 (t_1)^2 t_2 t_3$ mit einigen Zwischenzuständen (die Beschriftung von Kanten mit $\kappa(\cdot, \cdot) = 1$ wurde weggelassen). Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel enthält dieses Petri-Netz zwei kontrollierende Stellen: s_4 (kontrollierend für t_1) und s_5 (kontrollierend für t_3). Es gilt nämlich:

⁴ engl. token.

⁵ An dieser Stelle wollen wir vorwegnehmen, daß die Struktur der Erreichbarkeitsmenge des Petri-Netzes aus unserem Beispiel verhältnismäßig kompliziert ist, und zwar nicht semilinear. Trotzdem werden wir später sehen (§4, Lemma 4.4), daß diese Erreichbarkeitsmengen durch rekursive Relationen beschrieben werden können.

S2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE



S2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

$$\xi(s_4, t_1) = \xi(t_1, s_4) = 1$$

$$\xi(s_5, t_3) = \xi(t_3, s_5) = 1$$

und folglich ist (PN^*) nicht erfüllt. (Die vollständige Kantenabbildung kann dem Graphen direkt entnommen werden, was wir dem Leser überlassen wollen).

Diese beiden Stellen weisen darüberhinaus noch eine andere interessante Eigenschaft auf: es gilt stets $m(s_4) = 1 - m(s_5)$. Zwei Stellen s und \bar{s} nennen wir zueinander komplementär, wenn es eine Konstante $\alpha = \alpha(m_0) \in \mathbb{N}$,⁶ gibt, mit:

$$m(\bar{s}) = \alpha - m(s) \text{ für alle } m \in \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0).$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage das Erreichbarkeitsproblem und dessen Aspekte zu definieren.

Definition 2.2. Die Erreichbarkeitsmenge eines Petri-Netzes $\mathcal{P} = (S, T, \xi)$ mit dem Anfangszustand m_0 ist die Menge:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0) = \{m \mid m_0 \xrightarrow{\tau} m \text{ für eine zulässige Schaltfolge } \tau \in T^*\}.$$

Die Erreichbarkeitsmenge kann sich auch auf eine (nicht notwendigerweise endliche) Menge M_0 von Anfangszuständen beziehen:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(M_0) = \{m \mid \exists m_0 \in M_0 : m_0 \xrightarrow{\tau} m \text{ für eine zulässige Schaltfolge } \tau \in T^*\}.$$

Gilt $m \in \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0)$, so sagen wir, daß die Markierung m von m_0 aus erreichbar ist (formal: $m_0 \xrightarrow{*} m$ oder auch $M_0 \xrightarrow{*} m$, falls es sich um mehrere Anfangszustände handelt). Das allgemeine Erreichbarkeitsproblem ist gleichbedeutend mit der Aufgabe zu entscheiden, ob im gegebenen Petri-Netz ein Zustand m von einem Anfangszustand m_0 aus erreichbar ist. Das Inklusions- bzw. Gleichheitsproblem ist die Prüfung folgender Relationen für zwei Petri-Netze \mathcal{P} und \mathcal{Q} :

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0) \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{Q}}(m_0) \text{ für das Inklusionsproblem;}$$

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{Q}}(m_0) \text{ für das Gleichheitsproblem.}$$

⁶ \mathbb{N}_+ bedeutet die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Eine solche Prüfung ist allerdings nur dann sinnvoll, wenn \mathcal{P} und \mathcal{Q} von gleicher Dimension sind, d.h. $|\mathcal{S}_{\mathcal{P}}| = |\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}|$.

Im vorangegangenen Kapitel erwähnten wir bereits, daß diese Probleme unentscheidbar sind, ähnlich wie das Beschreibungsproblem der Erreichbarkeitsmengen. Entscheidbar hingegen ist das Erreichbarkeitsproblem, solange wir bei den gewöhnlichen Petri-Netzen bleiben.

Petri-Netze können einerseits sehr anschaulich durch PN-Graphen dargestellt werden - besitzen aber andererseits äquivalente Strukturen von rein algebraischem Charakter, sog. Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme, denen wir uns jetzt zuwenden wollen.

Definition 2.3. Ein Vektor-Ersetzungssystem \mathcal{V} zum Anfangsvektor $m_0 \in \mathbb{N}^n$ ist die Menge:

$$\mathcal{V} = \{v_j = (t_j^t, t_j^e) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z}^n \mid 1 \leq j \leq l, t_j^t + t_j^e \geq 0\}.$$

Die Vektorpaare aus \mathcal{V} bestehen jeweils aus dem Testvektor t_j^t und dem Ersetzungsvektor (auch Translationsvektor) t_j^e . Der Testvektor entscheidet über die Zulässigkeit der dazugehörigen Ersetzung - diese liegt vor, wenn $m \geq t_j^t$ gilt. Die Ersetzungsregel lautet:

$$m \rightarrow^{t_j^t} \bar{m} : \bar{m} = m + t_j^e.$$

Aus $t_j^t + t_j^e \geq 0$ folgt sofort $\bar{m} \geq 0$ und das ist die erste Affinität zu den gewöhnlichen Petri-Netzen, deren Zustände selbstverständlich als Elemente aus \mathbb{N}^n angesehen werden können. (Obwohl diese geometrisch gesehen Vektoren sind, sprechen wir häufig von Punkten aus dem n -dimensionalen Gitter \mathbb{N}^n , um Verwechslungen mit den Test- und Ersetzungsvektoren vorzubeugen.) Die völlige Gleichwertigkeit der Vektor-Ersetzungssysteme und Petri-Netze ist offensichtlich, da wir ja die Vektorpaare aus \mathcal{V} folgendermaßen setzen können:

$$v_j = (t_j^t, t_j^e) : t_j^t = \begin{pmatrix} k(s_1, t_j) \\ k(s_2, t_j) \\ \dots \\ \dots \\ k(s_n, t_j) \end{pmatrix}; \quad t_j^e = \begin{pmatrix} k(t_j, s_1) - k(s_1, t_j) \\ k(t_j, s_2) - k(s_2, t_j) \\ \dots \\ \dots \\ k(t_j, s_n) - k(s_n, t_j) \end{pmatrix};$$

⁷ \mathbb{Z} bedeutet die Menge der ganzen Zahlen.

§2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

Greifen wir noch einmal das letzte Beispiel (vgl. Abb. 2) auf. Das zu diesem Petri-Netz äquivalente Vektor-Ersetzungssystem besteht laut obiger Vorschrift aus folgenden Vektorpaaren:

$$v_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]; \quad v_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right];$$

$$v_3 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]; \quad v_4 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right];$$

Die Äquivalenz $\mathcal{P} = \mathcal{V}$ läßt einige Begriffe abwechselnd gebrauchen. So sprechen wir von Transitionen, Markierungen, Schaltvorgängen usw. auch wenn ein Vektor-Ersetzungssystem gemeint ist. Umgekehrt, wenn von Petri-Netzen die Rede ist, verstehen wir unter einem Schaltpfad die Punktefolge $\{m_\nu\}_{1 \leq \nu \leq k}$ aus \mathbb{N}^n mit $m_0 \xrightarrow{\tau^{(\nu)}} m_\nu$ und $\tau^{(\nu)} = (v_{j(1)} v_{j(2)} \cdots v_{j(\nu)}) \in \mathcal{V}^*$, $1 \leq \nu \leq k$ für eine Ersetzungsfolge $\sigma = (v_{j(1)} \cdots v_{j(k)}) \in \mathcal{V}^*$, obwohl eigentlich die Transitionenfolge $\tau = (t_{j(1)} \cdots t_{j(k)}) \in T^*$ gemeint ist. Im übrigen können die mit den Erreichbarkeitsmengen zusammenhängenden Probleme analog formuliert werden, womit wir den Leser nicht langweilen wollen.

Unsere Aufmerksamkeit verdient dafür ein anderer Umstand. Da der Testvektor am Ersetzungsvorgang nicht beteiligt ist, stellt sich die Frage, ob und wann die Ersetzungsregel so modifiziert werden kann, daß wir nur mit einem Vektor aus dem ursprünglichen Vektorpaar auskommen können. Für den Vektor v_2 aus unserem Beispiel könnten wir nur die Ersetzung t_j^* nehmen und sie als zulässig bezeichnen, falls diese in \mathbb{N}^n verbliebe, d.h. $m + t_j^* \geq 0$. Andererseits ist es unschwer zu erkennen, daß der Vektor v_1 eine solche Vereinfachung nicht zuläßt. Der „Selbsttest“ funktioniert hier nicht. Die Ursache dafür ist im Zusammenhang mit folgender Relation zu sehen:

$$(VAS) \quad t_{j,k}^i > 0 \Rightarrow t_{j,k}^i + t_{j,k}^o = 0 \quad 1 \leq k \leq n.$$

Der Vektor v_2 erfüllt diese Relation - v_1 dagegen nicht. Ein Vektor $v = (t^1, t^*)$ genügt (VAS) offensichtlich genau dann, wenn die äquivalente Transition t von keiner Stelle kontrolliert wird. Es besteht demnach die folgende Äquivalenz:

$$[\forall j \in \{1, \dots, l\}, k \in \{1, \dots, n\} : (\text{VAS})] = (\text{PN}^*).$$

Erfüllt ein Petri-Netz die Forderung (PN*), dann können sämtliche Vektorpaare aus seinem Vektor-Ersetzungssystem nach obiger Vorschrift reduziert werden. Es entsteht ein völlig anderes algebraisches Gebilde, das aber zu dem ursprünglichen Vektor-Ersetzungssystem (und damit zu einem Petri-Netz) äquivalent ist. Wir nennen es ein Vektor-Additionssystem. Vollständigkeitshalber formalisieren wir diesen Begriff in der nachfolgenden Definition.

Definition 2.4. Ein Vektor-Additionssystem \mathcal{U} zum Anfangsvektor $m_0 \in \mathbb{N}^n$ ist die Menge:

$$\mathcal{U} = \{v_j \in \mathbb{Z}^n \mid 1 \leq j \leq l\}.$$

Jeder Vektor aus \mathcal{U} ist gleichzeitig ein Test- und Ersetzungsvektor. Eine Ersetzung (oder einfach Addition) v_j ist zulässig, wenn $m + v_j \geq 0$ ist, die Ersetzungsregel selbst lautet: $m \rightarrow^{v_j} \tilde{m} : \tilde{m} = m + v_j$.

Da unser Petri-Netz aus dem ersten Beispiel (vgl. Abb. 1) offensichtlich (PN*) genügt, besteht die folgende, doppelte Äquivalenz:

$$\mathcal{P} = \mathcal{V} = \left\{ \left[\left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -2 \\ -3 \\ 1 \end{array} \right) \right] \right\} = \mathcal{U} = \left\{ \left(\begin{array}{c} -2 \\ -3 \\ 1 \end{array} \right) \right\}.$$

Das Vorhandensein einer Mindestzahl von Marken auf bestimmten Stellen als Voraussetzung für eventuelles Feuern von Transitionen ist eine Eigenschaft der gewöhnlichen Petri-Netze, die im allgemeinen nicht invertierbar ist, d.h. es ist nur partiell möglich, die Abhängigkeit des Schaltvorgangs vom Vorhandensein einer Höchstzahl von Marken, insbesondere vom Leersein bestimmter Stellen zu simulieren. Eine solche Abhängigkeit ist aber in manchen Fällen unentbehrlich - vor allem im Hinblick auf die WPNC-Berechenbarkeit⁸ (weak Petri net computer) von Funktionen, die das „Testen auf 0“ notwendig machen. Die

⁸ Die durch Rabin formulierte Theorie der WPNC-Berechenbarkeit werden wir noch genauer diskutieren (§6 - untersucht wird vor allem die Bedeutung der inhibitor-Kanten in diesem Zusammenhang). Den interessierten Leser verweisen wir darüberhinaus auf [18] und [27].

S2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

Fälle, bei denen sich solche Tests auf der Basis unseres Grundmodells bewerkstelligen lassen, werden wir im nächsten Kapitel diskutieren. Ansonsten ist eine qualitative Verallgemeinerung der gewöhnlichen Petri-Netze erforderlich, die wir jetzt vorstellen wollen.

Definition 2.5. Ein Petri-Netz mit inhibitor-Kanten ist ein Tupel $\mathcal{P}^i = (S, T, \xi)$ mit den Komponenten und Eigenschaften (PN1), (PN2), (PN3), (PN5) (vgl. Definition 2.1) und mit einer erweiterten Kantenabbildung:

$$(IN4) \quad \xi: (S \times T) \cup (T \times S) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\iota\} \text{ mit } \xi^{-1}(\{\iota\}) \subseteq (S \times T).$$

Die so erweiterte Kantenabbildung definiert unter Umständen - neben den üblichen Kanten - auch noch zusätzliche, sog. inhibitor-Kanten (gerichtet nur von Stellen hin zu den Transitionen). Im gewöhnlichen Petri-Netz ist die Menge $\xi^{-1}(\{\iota\})$ stets leer. Es ist nützlich, die Vielfachheiten dieser Kanten mit 0 zu identifizieren. Wir definieren daher die additiven Verknüpfungen von ι mit allen anderen Elementen aus $\mathbb{N} \cup \{\iota\}$ folgendermaßen:

$$\alpha + \iota = \alpha - \iota = \alpha \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N} \cup \{\iota\}.$$

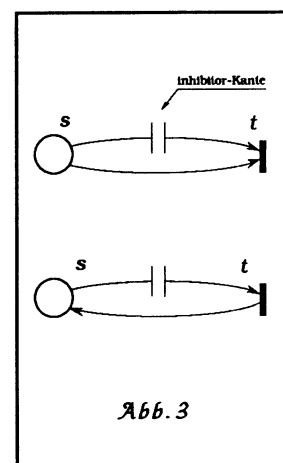
Wegen ihrer Kantenvielfachheiten bleiben die inhibitor-Kanten ohne Einfluß auf den Zustandsüberführungsvorgang selbst. Die Schaltregel für Petri-Netze mit inhibitor-Kanten ist mit der für gewöhnliche Petri-Netze scheinbar identisch: *Feuert eine aktivierte Transition t im Zustand m und ist der Zustand nach dem Schaltvorgang \bar{m} (formal: $m \rightarrow^t \bar{m}$), dann gilt:*

$$\bar{m}(s) = m(s) + \xi(t, s) - \xi(s, t) \text{ für alle } s \in S,$$

wobei diese Gleichung in den Kategorien unserer „Pseudoarithmetik“ auszuwerten ist. Etwas anderes verbirgt sich jedoch hinter dem Begriff „aktivierte Transition“. Diese Bezeichnung trifft auf eine Transition $t \in T$ zu, wenn gilt:

$$\forall s \in S: [m(s) - \xi(s, t) \geq 0] \wedge [(\xi(s, t) = \iota) \Rightarrow (m(s) = 0)]$$

Graphisch gesehen sind Überlappungen beider Kantenarten möglich (vgl. Abb. 3 oben), was aber unsere Definition ausschließt. Möglich dagegen ist eine andere Konstellation (vgl. Abb. 3 unten). Hier gilt $\xi(t, s) > 0 \wedge \xi(s, t) = \iota$ für die Stelle s und Transition $t \in T$. Wir sprechen von einer selbstblockierenden (auch rückgekoppelten) inhibitor-Transition. (Stellen und Transitionen, die mit einer inhibitor-Kante assoziiert sind nennen wir entsprechend inhibitor-Stellen, bzw. inhibitor-Transitionen.)



Einer Präzisierung bedarf noch der Begriff „kontrollierende Stellen“. Unter einer kontrollierenden Stelle im Petri-Netz mit inhibitor-Kanten verstehen wir ein $s \in S$ mit $\xi(t, s) > 0 \wedge [\xi(s, t) > 0 \vee \xi(s, t) = 1]$ für eine Transition $t \in T$, d.h. eine Ein- und gleichzeitig Ausgangsstelle für t hinsichtlich der erweiterten Kantenabbildung. Enthält ein Petri-Netz mit inhibitor-Kanten solche Stellen nicht, dann gilt (PN^*) hinsichtlich dieser Kantenabbildung:

$$(PN^*) \quad \forall s \in S, t \in T: \xi(s, t) = 0 \vee \xi(t, s) = 0.$$

Selbstverständlich können auch die Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme in diesem Sinne verallgemeinert werden. Da wir jedoch unsere Betrachtungen hauptsächlich auf die sehr anschaulichen Petri-Netze beziehen, wollen wir dieses Konzept nur in verkürzter Form vorstellen in der Hoffnung, daß unsere Definition hinreichend selbsterklärend ist (vgl. auch die Ausführungen zum Beispiel, Abb. 4).

Definition 2.6. Ein Vektor-Ersetzungssystem mit inhibitor-Vektoren zum Anfangsvektor $m_0 \in \mathbb{N}^n$ ist die Menge:

$$\mathcal{V} = \{v_j = (t_j^i, t_j^o) \in (\mathbb{N} \cup \{1\})^n \times \mathbb{Z}^n \mid 1 \leq j \leq l, t_j^i + t_j^o \geq 0\}.$$

Die Definition 2.5 läßt Überlappungen beider Kantenarten (vgl. Abb. 3 oben) nicht zu. Deshalb muß unbedingt gefordert werden:

$$(IV) \quad \forall v \in \mathcal{V}, j \in \{1, \dots, n\}: (t_j^i = 1) \Rightarrow (t_j^o = 0).$$

Definition 2.7. Ein Vektor-Additionssystem mit inhibitor-Vektoren zum Anfangsvektor $m_0 \in \mathbb{N}^n$ ist die Menge:

$$\mathcal{U} = \{v_j \in (\mathbb{Z} \cup \{1\})^n \mid 1 \leq j \leq l\}.$$

Die Äquivalenz vom Petri-Netz mit inhibitor-Kanten zu einem Vektor-Additionssystem mit inhibitor-Vektoren liegt nur dann vor, wenn die Eigenschaft (PN^*) hinsichtlich der erweiterten Kantenabbildung erfüllt ist. Gleiches gilt für Vektor-Ersetzungssysteme mit inhibitor-Vektoren, wenn sie der entsprechend modifizierten Forderung (VAS) genügen.

In der vorliegenden Arbeit blicken wir nur sporadisch auf Petri-Netze mit mehreren inhibitor-Kanten. Da bereits zwei inhibitor-Kanten die Simulation von Turing-Maschinen ermöglichen (Zählerautomaten, vgl. §6), können weitere solche Kanten die Leistungsfähigkeit der Petri-Netze ohnehin nicht mehr entscheidend steigern. Außerdem ist das Erreichbarkeitsproblem in diesem Fall als unentscheidbar bekannt. Unsere Aufmerksamkeit gilt daher primär den Petri-Netzen mit genau einer inhibitor-Kante, die das bislang offene Erreichbarkeitsproblem aufwerfen.

S2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

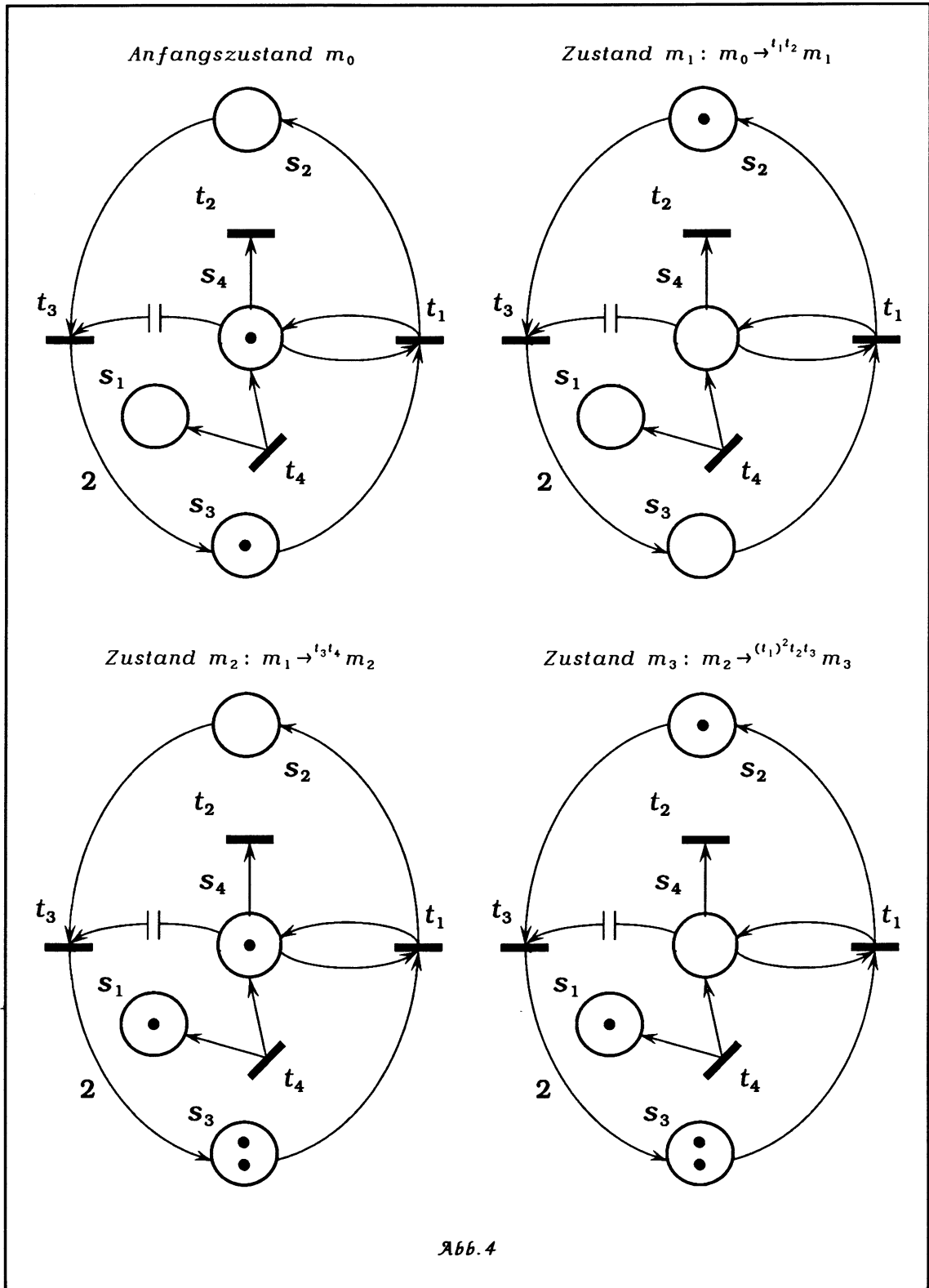


Abb. 4

Zum Schluß dieses Kapitels geben wir ein Beispiel für ein Petri-Netz mit einer inhibitor-Kante (vgl. Abb. 4), wobei die Parallelitäten zum vorangegangenen Beispiel unübersehbar sein dürften. Wir sagen, daß beide Petri-Netze einander simulieren (im später zu präzisierenden Sinne). Zwar stimmen deren Dimensionen nicht überein. Betrachten wir aber erneut die (zulässige) Schaltfolge $t_1 t_2 t_3 t_4 (t_1)^2 t_2 t_3$, so stellen wir fest, daß die durch diese Schaltfolge erzeugten Schaltpfade⁹ identisch sind, bezüglich s_1, s_2, s_3 . Wir sprechen von der Projektion der „getroffenen“ Punkte aus \mathbb{N}^n auf diese drei Stellen.

Die erweiterte Kantenabbildung ist dem Graphen zu entnehmen, was wir dem Leser überlassen möchten. Stattdessen wollen wir das zu unserem Petri-Netz äquivalente Vektor-Ersetzungssystem (mit genau einem inhibitor-Vektor) vollständig angeben:

$$v_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]; \quad v_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right];$$

$$v_3 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]; \quad v_4 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right];$$

Offensichtlich können die Vektoren v_2, v_3, v_4 auch in den Kategorien der Vektor-Additionssysteme mit inhibitor-Vektoren definiert werden:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Die bereits vorgestellten Konzepte, wie z.B. Erreichbarkeitsmengen und die darauf zurückgehenden Schlüsselprobleme, sind identisch zu formulieren. Zu beachten ist nur, daß

⁹ Zur Erinnerung: unter einem Schaltpfad verstehen wir die Folge der Punkte aus dem n -dimensionalen Gitter \mathbb{N}^n , die beim Feuern einer Schaltfolge (bestimmt durch eine Transitionenfolge) nacheinander "getroffen" werden.

§2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

etwas anderes unter aktivierten Transitionen, bzw. zulässigen Transitionenfolgen zu verstehen ist. Im vorangegangenen Kapitel haben wir bereits angedeutet, daß inhibitor-Kanten diese Probleme erheblich erschweren können. Die Tatsache, daß zwei und mehr solche Kanten das Erreichbarkeitsproblem unentscheidbar machen [7], ist ein Indiz dafür, daß die inhibitor-Kanten eine echte, qualitative Verallgemeinerung der gewöhnlichen Petri-Netze darstellen. Spätestens bei der Diskussion der Leistungsfähigkeit verschiedener Petri-Netz-Varianten (§6) werden wir uns davon überzeugen können.

S2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE
