

### §3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

Eine weitere Variante der (nicht notwendigerweise gewöhnlichen) Petri-Netze wird unsere Betrachtungen in diesem Paragraphen wesentlich erleichtern. Es handelt sich um Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen.<sup>1</sup>

**Definition 3.1.** Ein Petri-Netz mit (endlich vielen) kontrollierenden Zuständen ist ein Tupel  $\mathcal{P}^{1,Q} = (S, T, Q, \xi)$  mit folgenden Komponenten und Eigenschaften:

- (QN1)  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  ist eine endliche Menge von Stellen;
- (QN2)  $T = \{t_1, \dots, t_l\}$  ist eine endliche Menge von Transitionen;
- (QN3)  $Q = \{q_1, \dots, q_d\}$  ist eine endliche Menge von kontrollierenden Zuständen;
- (QN4)  $S \cap T = S \cap Q = T \cap Q = \emptyset$ ;
- (QN5)  $\xi: (S \times T) \cup (T \times S) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{1\}$  ist die erweiterte Kantenabbildung;
- (QN6)  $q^a: T \rightarrow Q$ ,  $q^e: T \rightarrow Q$  sind zwei Zustandsabbildungen, die allen Transitionen entsprechend einen Anfangs- und Endzustand zuordnen.

Gilt  $\xi^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ , dann sprechen wir von einem gewöhnlichen Petri-Netz mit kontrollierenden Zuständen. Ferner kann (PN\*) gelten. Die Markierung beinhaltet neben der üblichen Stellenmarkierung stets den augenblicklich vorliegenden kontrollierenden Zustand. Wir sprechen von einer Multimarkierung:

$$(QN7) \quad \vec{m} = (m(s), m(q)): S \cup \{q\} \rightarrow \mathbb{N} \cup Q \text{ mit } m(q) \in Q, m(s) \in \mathbb{N} \text{ für alle } s \in S.$$

Eine Transition  $t \in T$  ist nur dann aktiviert, wenn ihr Anfangszustand  $q^a(t)$  mit dem kontrollierenden Zustand  $m(q)$  übereinstimmt:

$$\forall s \in S: [m(s) - \xi(s, t) \geq 0] \wedge [(\xi(s, t) = 1) \Rightarrow (m(s) = 0)] \wedge [m(q) = q^a(t)].$$

Schaltregel für Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen: Feuert eine aktivierte Transition  $t$  im Zustand  $\vec{m}$  und ist der Zustand nach dem Schaltvorgang  $\vec{m}'$  (formal:  $\vec{m} \rightarrow^t \vec{m}'$ ), dann gilt:

$$\begin{aligned} m'(s) &= m(s) + \xi(t, s) - \xi(s, t) \text{ für alle } s \in S, \\ m'(q) &= q^e(t). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Kontrollierende Zustände wurden in [10] im Zusammenhang mit gewöhnlichen Vektor-Additionssystemen eingeführt. Unsere Definition verallgemeinert dieses Konzept ein wenig.

Zulässige Schaltfolgen, Erreichbarkeitsmengen und weitere Grundkonzepte sind dem §2 unter Berücksichtigung obiger Schaltregel zu entnehmen. Dabei ist zu beachten, daß Schaltpfade, bzw. Erreichbarkeitsmengen lauter Punkte aus dem Multigitter  $N^n \times Q$  enthalten.

Auch hier unterstützen wir unsere Definition durch ein Beispiel. Die Abb.5 zeigt ein gewöhnliches Petri-Netz mit zwei kontrollierenden Zuständen  $q_1, q_2$  (den augenblicklich vorliegenden kontrollierenden Zustand markiert die doppelt eingekreiste Stelle  $q$ ) und drei Stellen, wobei sofort auffällt, daß dieses Netz - im Gegensatz zu den bislang vorgestellten - nicht zusammenhängend ist. Die Transition  $t_2$  z.B. ist völlig isoliert (eine reine Zustandsüberföhrungstransition). Sie kann jedoch wegen  $q_1 \rightarrow q_2$  nicht völlig unabhängig vom übrigen Netz feuern. Die graphisch gesehen fehlenden Kanten sind wegen der Transitionbeschriftungen *de facto* existent.

Die bereits hinlänglich bekannte Schaltfolge  $t_1 t_2 t_3 t_4 (t_1)^2 t_2 t_3$  erzeugt wieder den gleichen Schaltpfad, wenn wir diesen bei den vorangegangenen Beispielen auf die ersten drei Stellen projizieren.<sup>2</sup> In der Tat werden wir uns im diesem Paragraphen davon überzeugen können, daß kontrollierende Zustände - im Gegensatz zu den inhibitor-Kanten - keine qualitative Verallgemeinerung des Grundmodells darstellen. Diese Verallgemeinerung ist allenfalls quantitativ, bezogen auf die Dimension  $n = |S|$ .

Die formalen Definitionen der Vektor-Additions- und Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen beinhalten Transitionenbeschriftungen - sind aber ansonsten mit den aus dem vorherigen Paragraphen identisch, weshalb wir diese Definitionen dem Leser überlassen. Genügen möge an dieser Stelle die Angabe des Vektor-Additionssystems für unser Petri-Netz, das (PN\*) offensichtlich genügt.

$$v_1 = \left[ (q_1 \rightarrow q_1), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]; \quad v_2 = \left[ (q_1 \rightarrow q_2), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right];$$

$$v_3 = \left[ (q_2 \rightarrow q_2), \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]; \quad v_4 = \left[ (q_2 \rightarrow q_1), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right];$$

Bei der Diskussion der bisherigen Beispiele sprachen wir bereits von Projektionen der Erreichbarkeitsmengen, bzw. Schaltpfade auf Stellen, sowie von Simulationen verschiedener Varianten der Petri-Netze. Die nachfolgenden Überlegungen sollen diese Begriffe etwas präzisieren.

---

<sup>2</sup> vgl. die nachfolgende Definition 3.2

§3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

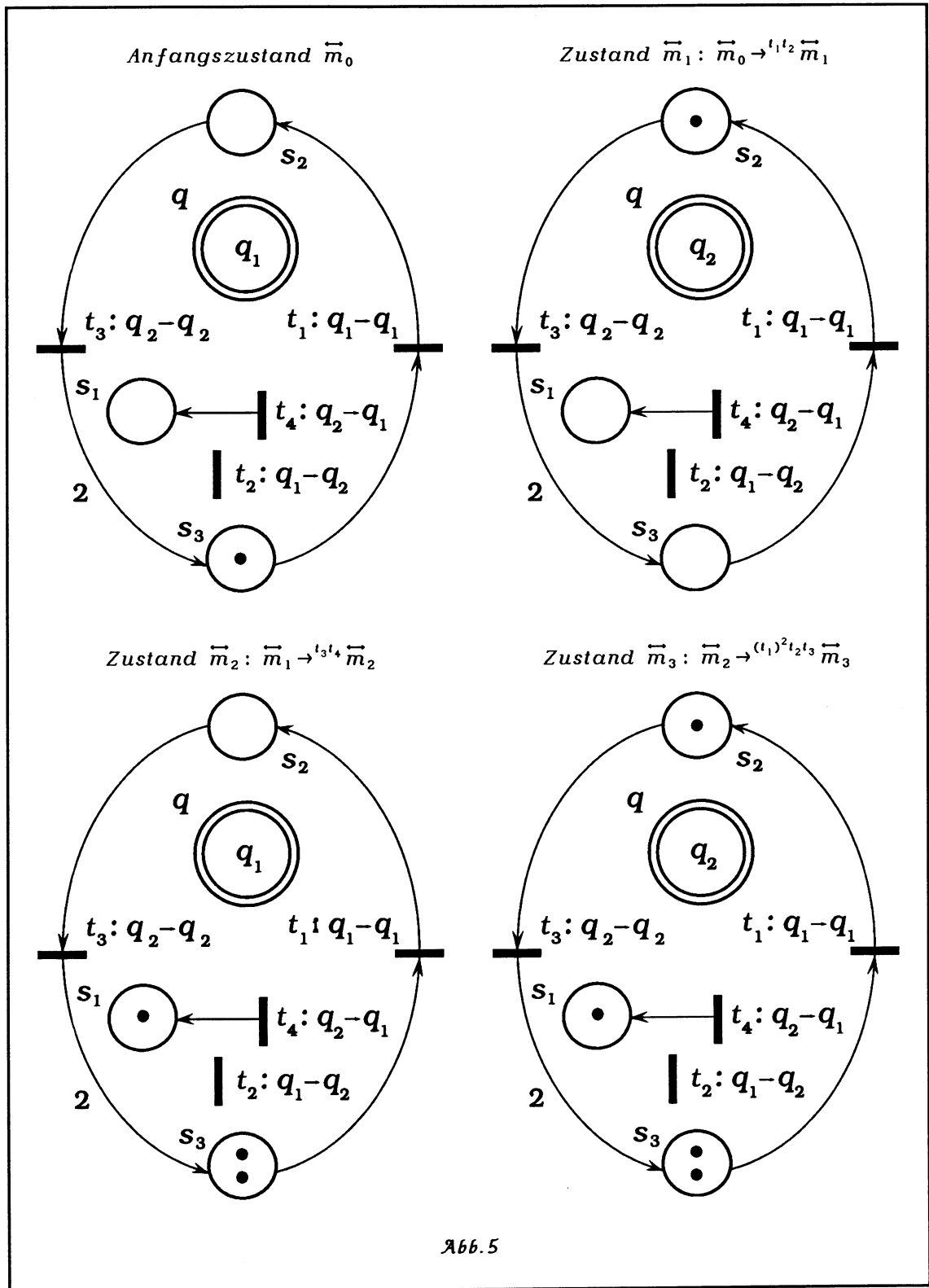


Abb. 5

**Definition 3.2.** Unter einer Projektion der Erreichbarkeitsmenge  $\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0)$  ( $\bar{M}_0 \subseteq \mathbb{N}^n \times Q$ ) eines Petri-Netzes  $\mathcal{P}^{1,0}$  auf ein Gitter  $G = \mathbb{N}^m \times Q^k$  mit  $m \leq n$  und  $k \in \{0, 1\}$  verstehen wir die Menge:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) \downarrow_{\{x_1, \dots, x_m, q\}} = \{\bar{x} \in G \mid \exists \bar{x}' \in \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) : (x'_1, \dots, x'_m, q) = (x_1, \dots, x_m, q)\}$$

oder  $\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) \downarrow_{\{x_1, \dots, x_m\}} = \{\bar{x} \in G \mid \exists \bar{x}' \in \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) : (x'_1, \dots, x'_m) = (x_1, \dots, x_m)\}.$

Die Projektion vom Schaltpfad  $\{\alpha_v\}_{1 \leq v \leq k} \in \mathbb{N}^n \times Q$  ist dann analog zu verstehen.

Naturgemäß unpräzise und daher prinzipiell undefinierbar ist die Bezeichnung „Simulation“. Man könnte von gegenseitiger Simulation zweier Petri-Netze sprechen, wenn deren Erreichbarkeitsmengen gleich wären, was allerdings nur dann vorliegen könnte, wenn beide in ihren Dimensionen übereinstimmen würden. Diese, sagen wir starke Simulation, wird aber nur selten von praktischer Bedeutung sein. Viel wichtiger für unsere Betrachtungen ist die etwas „abgeschwächte“ Simulation, die sich lediglich auf gewisse Projektionen von Erreichbarkeitsmengen bzw. Schaltpfade bezieht, wie wir bereits bei unseren Beispielen Abb. 2, Abb. 4 beobachten konnten. Wir verwenden daher diesen Begriff stets mit der dazugehörigen Spezifikation der Projektionen.

Die nachfolgenden Lemmata belegen, daß kontrollierende Zustände lediglich eine quantitative Verallgemeinerung des Grundmodells darstellen, wobei sich diese Quantität auf die Dimension  $n = |S|$  bezieht. Zunächst zeigen wir, daß diese Aussage auf kontrollierende Stellen in Petri-Netzen mit kontrollierenden Zuständen zutrifft - und das ohne Bezug auf die Dimension.

**Lemma 3.1.** Jedes Petri-Netz  $\mathcal{P}^{1,0}$  kann simuliert werden durch ein gleichdimensionales Petri-Netz  $\mathcal{R}^{1,0}$  mit zusätzlichen kontrollierenden Zuständen, sodaß (PN\*) erfüllt ist. Es gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{R}}(\bar{M}_0) \downarrow_{q=q} = \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) \downarrow_{q=q}, \text{ für alle } q_j \in Q_{\mathcal{P}}, \bar{M}_0 \subseteq \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}.^3$$

**Beweis:** Wir setzen  $Q_{\mathcal{R}} = Q_{\mathcal{P}} \cup Q^{(z)}$  mit  $|Q^{(z)}| = |T_{\mathcal{P}}|$  und modifizieren die Transitionenmenge, indem wir jede Transition  $t_j \in T_{\mathcal{P}}$  durch zwei Transitionen  $t_j^-: q^a(t) \rightarrow q_j^{(z)}$ ;  $t_j^+: q_j^{(z)} \rightarrow q^e(t)$  ersetzen, wobei für die Kantenabbildung gilt:

$$k_{\mathcal{R}}(s, t_j^-) = k_{\mathcal{P}}(s, t_j); \quad k_{\mathcal{R}}(t_j^-, s) = 0,$$

$$k_{\mathcal{R}}(t_j^+, s) = k_{\mathcal{P}}(t_j, s); \quad k_{\mathcal{R}}(s, t_j^+) = 0.$$

<sup>3</sup> Die hier verwendete Notation bedeutet auch eine Art Projektion - ist jedoch, im Gegensatz zur Definition 3.2, folgendermaßen zu verstehen:

$A|_{\rho} = \{\alpha \in A \mid \alpha \text{ genügt } \rho\}.$

## §3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

Aus dieser Konstruktion folgt sofort (PN\*). Es gilt

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\vec{M}_0) \upharpoonright_{q-q_j} \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{R}}(\vec{M}_0) \upharpoonright_{q-q_j},$$

wegen  $\vec{m} \xrightarrow{t_j} \vec{m}'$ ;  $\vec{m} \xrightarrow{t_j^*} \vec{m}'$  für alle  $j \in \{1, \dots, l\}$ ,  $\vec{m} \in \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$  und offensichtlich auch

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\vec{M}_0) \upharpoonright_{q-q_j} \supseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{R}}(\vec{M}_0) \upharpoonright_{q-q_j},$$

weil ja alle zulässigen Schaltpfade des  $\mathfrak{R}^{1,0}$  zwischen beliebigen Punkten  $\vec{m}$  und  $\vec{m}'$  aus  $\mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$  auf Schaltfolgen von der Form  $(t_{j(1)}^- t_{j(1)}^+ \dots (t_{j(v)}^- t_{j(v)}^+))$  zurückgehen.  $\square$

Demnach ist die Unterscheidung zwischen Vektor-Additionssystemen und Vektor-Ersetzungssystemen (mit kontrollierenden Zuständen) auch bei dimensionsbezogenen Überlegungen nicht zwingend erforderlich. Die Eigenschaft (PN\*) kann verhältnismäßig einfach hergestellt werden, wenn wir zusätzliche kontrollierende Zustände in Kauf nehmen. Anders sieht es aus, wenn wir diese Zustände auch noch simulieren wollen. Es ist zwar immer möglich, aber nur unter Zuhilfenahme zusätzlicher Stellen.

**Lemma 3.2.** Jedes Petri-Netz  $\mathcal{P}^{1,0}$  mit kontrollierenden Zuständen kann simuliert werden durch ein Petri-Netz  $\mathcal{R}$  (ohne kontrollierende Zustände) mit Hilfe von zwei zusätzlichen Stellen  $s_1^{(z)}, s_2^{(z)}$ , wobei diese kontrollierend sind für alle  $t \in T_{\mathcal{R}}$ . Für  $Q_{\mathcal{P}} = \{q_1, \dots, q_d\}$  gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\vec{M}_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}} = \mathfrak{R}_{\mathcal{R}}(M_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}}$$

für alle Anfangsmengen  $\vec{M}_0 \subseteq \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$  und  $M_0 \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$  mit:

$$(m(s_1), \dots, m(s_n), q_j) \in \vec{M}_0 \Leftrightarrow (m(s_1), \dots, m(s_n), j, d-j) \in M_0.$$

**Beweis:** Jede Multimarkierung  $\vec{m} = (m(s_1), \dots, m(s_n), q_j) \in \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$  in  $\mathcal{P}$  identifizieren wir mit der üblichen Markierung  $m = (m(s_1), \dots, m(s_n), j, d-j) \in \mathbb{N}^{n+2}$  in  $\mathcal{R}$ . Damit ist jedes  $q_j \in Q_{\mathcal{P}}$  gleichbedeutend mit  $(m(s_1^{(z)}), m(s_2^{(z)})) = (j, d-j)$ . Wir konstruieren die Transitionenmenge  $T_{\mathcal{R}}$  mit  $|T_{\mathcal{R}}| = |T_{\mathcal{P}}|$ , sowie die nachfolgend spezifizierte Kantenabbildung:

$$\kappa_u(t, s) = \begin{cases} d-j : q_j = q^e(t) \text{ falls } s = s_2^{(z)}, \\ j : q_j = q^e(t) \text{ falls } s = s_1^{(z)}, \\ \kappa_{\mathcal{P}}(t, s) \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$\xi_u(s, t) = \begin{cases} d - j : q_j = q^a(t) \text{ falls } s = s_2^{(z)}, \\ j : q_j = q^a(t) \text{ falls } s = s_1^{(z)}, \\ \xi_{\mathcal{P}}(s, t) \text{ sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich kann jeder Schaltvorgang des  $\mathcal{P}$  durch  $\mathcal{R}$  simuliert werden. Es bleibt zu zeigen, daß für alle  $(m(s_1^{(z)}), m(s_2^{(z)})) = (j, d - j)$  nur diejenigen Transitionen aktiviert sein können, für die in  $\mathcal{P}$  galt:  $q^a(t) = q_j$ . Die Stellen  $s_1^{(z)}, s_2^{(z)}$  sind komplementär<sup>4</sup> zueinander und folglich gilt für alle Transitionen  $t$  mit  $q^a(t) \neq q_j$  und für jeden Zustand  $m$  mit  $(m(s_1^{(z)}), m(s_2^{(z)})) = (j, d - j)$ :

$$m(s_1^{(z)}) - \xi(s_1^{(z)}, t) < 0 \text{ oder } m(s_2^{(z)}) - \xi(s_2^{(z)}, t) < 0.$$

Das ergibt  $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}(\vec{M}_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}} \supseteq \mathcal{R}_{\mathcal{R}}(M_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}}$ , also insgesamt unser Lemma.  $\square$

Erinnern wir uns an die Beispiele Abb. 2, Abb. 4 (die Abb. 6 zeigt beide Petri-Netze in ihren Anfangszuständen). Bereits früher stellten wir gewisse Affinitäten bezüglich der Erreichbarkeitsmengen fest und vermuteten beiderseitige Simulation. Jetzt können wir diese Vermutung bestätigen und darüberhinaus genaue Angaben über die implizit gemeinten Projektionen der Erreichbarkeitsmengen machen (es handelt sich um Projektionen auf die ersten drei Stellen im Sinne der Definition 3.1.)

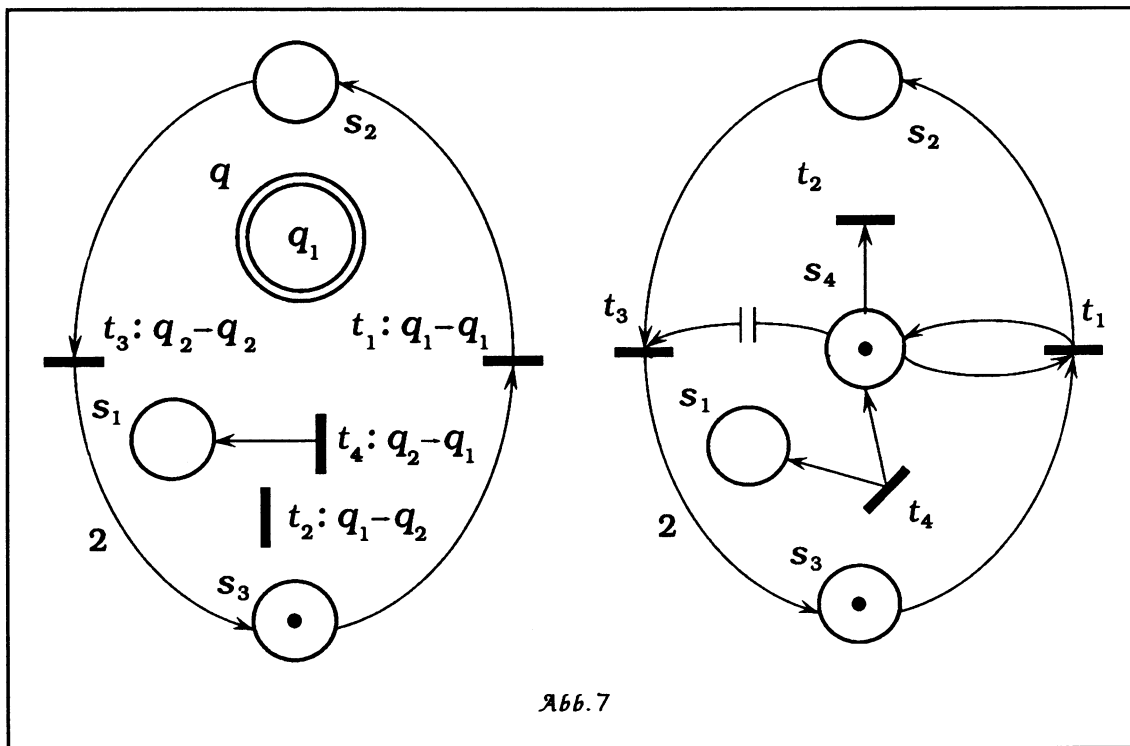
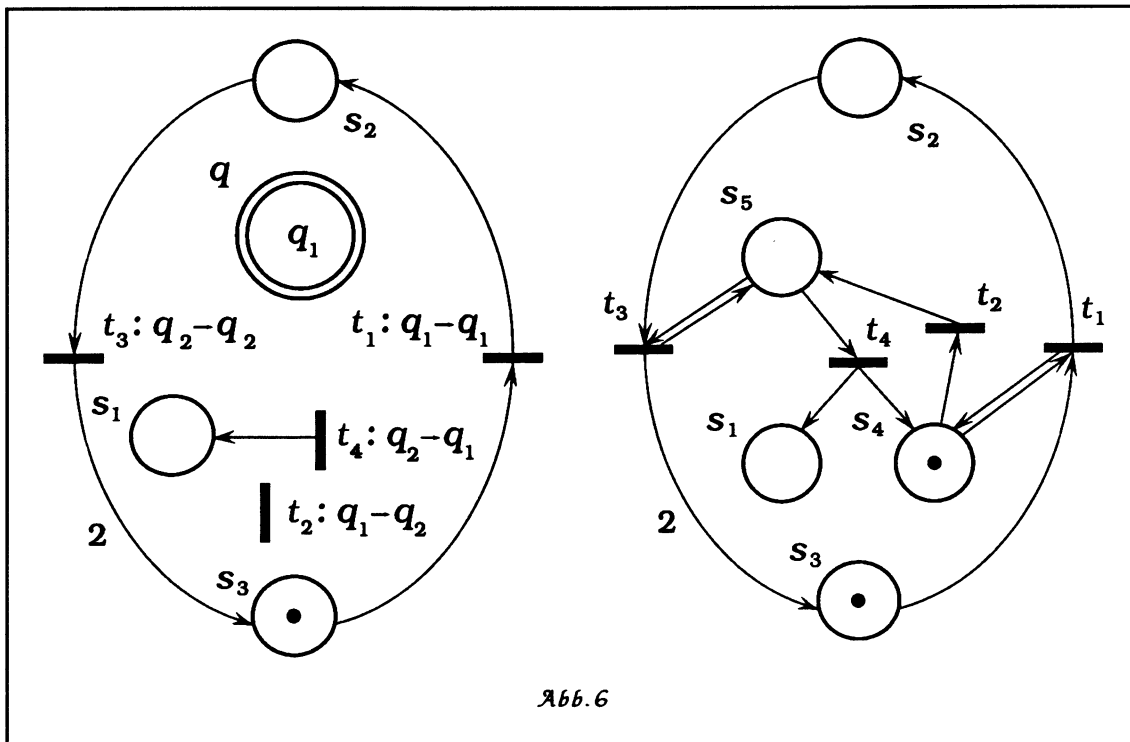
Unübersehbar ist, daß das Petri-Netz (Abb. 6 rechts) nicht strikt nach der Vorschrift aus dem Lemma 3.2 konstruiert ist. Hier ist eine Vereinfachung dahingehend möglich, daß die zwei zusätzlichen Stellen, in unserem Falle  $s_4, s_5$ , nicht alle Transitionen kontrollieren müssen. Eine solche Möglichkeit besteht aber nur dann, wenn lediglich zwei kontrollierende Zustände zu simulieren sind. Wir können dann, wie in unserem Beispiel, diese beiden Zustände entsprechend durch  $(m(s_1^{(z)}), m(s_2^{(z)})) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$  markieren. Im allgemeinen ist jedoch exakt nach der Vorschrift aus unserem Lemma zu verfahren.

Unser Petri-Netz aus dem Beispiel Abb. 5 bringt mit Hilfe nur einer zusätzlichen Stelle (und genau einer inhibitor-Kante) die gleiche Simulation zustande (vgl. Abb. 7 - auf den Beweis wollen wir hier verzichten<sup>5</sup>). Das bedeutet aber nicht, daß bei derartigen Simulationen immer nur eine zusätzliche Stelle erforderlich ist. Die Simulation aus unserem Beispiel ist vielmehr aufgrund der Spezifik des zu simulierenden Petri-Netzes möglich. Im allgemeinen sind zwei zusätzliche Stellen auch dann unbedingt erforderlich, wenn nur zwei kontrollierende Zustände zu simulieren sind - trotz verfügbarer inhibitor-Kante.

<sup>4</sup> vgl. §2, Diskussion des Beispiels Abb. 2.

<sup>5</sup> Der Beweis vom Lemma 4.4 aus §4 belegt implizit diese Simulation.

§3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS



Das Lemma 3.2 ermöglicht eine sehr elegante Simulation der kontrollierenden Zustände. Erweiterungen von Transitionenmengen sind nicht erforderlich und daher sind identische Schaltfolgen zulässig. Gleiches gilt für entsprechend projizierte Schaltpfade. Bei all den Vorzügen hat diese Konstruktion dennoch einen kleinen Schönheitsfehler: die Eigenschaft (PN\*) geht verloren, wo sie doch in dem zu simulierenden Petri-Netz laut Lemma 3.1 praktisch umsonst zu haben ist. Die Frage, die wir uns stellen müssen, ist, ob kontrollierende Zustände mit Hilfe von zusätzlichen Stellen simuliert werden können, die ihrerseits keine Transitionen kontrollieren. Es ist in der Tat möglich. Erforderlich sind drei zusätzliche Stellen, sowie eine erhebliche Erweiterung der Transitionenmenge. Diese Konstruktion, die im wesentlichen auf [10] zurückgeht, studieren wir nun im nachfolgenden Lemma (vgl. auch Anhang A).

**Lemma 3.3.** Jedes Petri-Netz  $\mathcal{P}^{1,0}$  mit kontrollierenden Zuständen kann simuliert werden durch ein Petri-Netz  $\mathcal{R}$  (ohne kontrollierende Zustände) mit Hilfe von drei zusätzlichen Stellen  $s_1^{(z)}, s_2^{(z)}, s_3^{(z)}$ , sodaß (PN\*) erfüllt ist. Für  $Q_{\mathcal{P}} = \{q_1, \dots, q_d\}$  gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}} = \mathfrak{R}_{\mathcal{R}}(M_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}}$$

für alle Anfangsmengen  $\bar{M}_0 \subseteq \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$ ,  $M_0 \subseteq \mathbb{N}^{n+3}$  mit:

$$\begin{aligned} (m(s_1), \dots, m(s_n), q_j) \in \bar{M}_0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (m(s_1), \dots, m(s_n), j, (d+1)(d+1-j), 0) &\in M_0. \end{aligned}$$

**Beweis:** Jede Multimarkierung  $\bar{m} = (m(s_1), \dots, m(s_n), q_j) \in \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$  in  $\mathcal{P}$  identifizieren wir mit  $m = (m(s_1), \dots, m(s_n), j, (d+1)(d+1-j), 0) \in \mathbb{N}^{n+3}$  in  $\mathcal{R}$ . Damit ist jede Markierung  $(m(s_1^{(z)}), m(s_2^{(z)}), m(s_3^{(z)})) = (j, (d+1)(d+1-j), 0)$  gleichbedeutend mit dem kontrollierenden Zustand  $q_j \in Q_{\mathcal{P}}$ . Das Feuern einer Transition  $t \in T_{\mathcal{R}}$  wird durch drei Transitionen  $t^1, t^2, t^3$  simuliert, wobei nur die letzte die Stellen aus  $S_{\mathcal{P}}$  verändert. Die ersten zwei erzeugen geeignete Markierungen auf den zusätzlichen Stellen, die für die korrekte Simulation sorgen. Sei  $t_k : q_i \rightarrow q_j \in T_{\mathcal{P}}$ . Wir beschreiben die Transitionen  $t_k^1, t_k^2, t_k^3$  in den Kategorien der Vektor-Additionssysteme:

$$v_k^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -i \\ -d(d+1-i) \\ i(d+1) \end{pmatrix}; \quad v_k^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ (d+1)(d+1-i) \\ -(d+1-i) \\ -id \end{pmatrix}; \quad v_k^3 = \begin{pmatrix} * \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ * \\ j - (d+1)(d+1-i) \\ (d+1)(d+1-j) \\ -i \end{pmatrix};$$

## §3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

Daß die Zustandsübergänge korrekt simuliert werden, kann der Leser leicht nachprüfen, denn für eine Transition  $t \in T_\varphi$  mit  $t: q_i \rightarrow q_j$  gilt:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ i \\ (d+1)(d+1-i) \\ 0 \end{pmatrix} + v_k^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ d+1-i \\ i(d+1) \end{pmatrix} + v_k^2 = \\
 & = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ (d+1)(d+1-i) \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + v_k^3 = \begin{pmatrix} * \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ * \\ j \\ (d+1)(d+1-j) \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

wie im unserem Lemma behauptet. Ferner haben wir hier mit lauter nichtnegativen Markierungen zu tun, was die Zulässigkeit dieser Schaltfolgen bestätigt. Zu überlegen bleibt lediglich, ob ein solches Vektor-Additionssystem auch unzulässige Zustandsübergänge simulieren kann. Dazu nehmen wir an, daß der Zustand  $q_i$  vorliegt (was der ersten Markierung in der obigen Abbildung entspricht) und prüfen zunächst, ob eine Transition  $t_k^1$ , die den Zustandsübergang  $q_j \rightarrow q_i$  für ein  $j \neq i$  initialisieren soll, aktiviert sein kann. Für  $j > i$  hieße es aber:

$$m(s_1^{(z)}) = i \rightarrow t_k^1 (i-j) < 0$$

und für  $j < i$  (oder besser  $j \leq i-1$ ):

$$\begin{aligned}
 m(s_2^{(z)}) &= (d+1)(d+1-i) \rightarrow t_k^1 (d+1)(d+1-i) - d(d+1-j) = (d+1)d + \\
 &+ (d+1)(1-i) - (d+1)d + dj = (d+1)(1-i) + dj \leq (d+1)(1-i) - d(1-i) = \\
 &= 1-i \leq 1 \Rightarrow j \leq 0.
 \end{aligned}$$

Gleiches gilt für die Transitionen  $t_k^2$  und  $t_k^3$ , was die gleiche Beweistechnik sofort belegt. Die erste der beiden kann für  $j < i$  sicherlich nicht feuern, wegen:

## §3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

$$m(s_2^{(z)}) = d + 1 - i \rightarrow i^2 d + 1 - i - d - 1 + j < 0.$$

Für  $j > i$  ( $i \leq j - 1$ ) heiße es wiederum:

$$m(s_3^{(z)}) = i(d + 1) \rightarrow i^2 i(d + 1) - jd \leq (j - 1)(d + 1) - jd = j - d - 1 < 0.$$

Aus ähnlichen Gründen wird die Transition  $t_k^3$  für  $j > i$  durch die Stelle  $s_3^{(z)}$ , und für  $j < i$  durch  $s_1^{(z)}$  am Feuern gehindert.  $\square$

Damit ist klar, daß die Eigenschaft (PN\*) keine Qualität für sich ist. Wir können sie in jedem Petri-Netz erreichen, wenn wir drei zusätzliche Stellen spendieren.

**Korollar 3.4.** Jedes Petri-Netz  $\mathcal{P}'$  kann durch ein Petri-Netz  $\mathcal{R}'$  mit drei zusätzlichen Stellen  $s_1^{(z)}, s_2^{(z)}, s_3^{(z)}$  simuliert werden ( $\mathcal{P}'$ ,  $\mathcal{R}'$  - jeweils ohne kontrollierende Zustände). Das simulierende Netz  $\mathcal{R}'$  genügt (PN\*) und für  $d - 1 = |\{(s, t) | s \in S_{\mathcal{P}'}, t \in T_{\mathcal{P}'}, s \text{ kontrollierend für } t\}|$  gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}'}(M_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{R}'}(L_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}} \text{ für alle } M_0 \subseteq \mathbb{N}^n, L_0 \subseteq \mathbb{N}^{n+3} \text{ mit:}$$

$$(m(s_1), \dots, m(s_n)) \in M_0 \Leftrightarrow (m(s_1), \dots, m(s_n), 1, d(d + 1), 0) \in L_0.$$

**Beweis:** Die Eigenschaft (PN\*) erreichen wir nach Lemma 3.1 durch Einführung von  $d$  kontrollierenden Zuständen, die wir dann nach Lemma 3.3 simulieren können.  $\square$

**Korollar 3.5.** Jedes Petri-Netz  $\mathcal{P}'^{\circ}$  kann simuliert werden durch ein Petri-Netz  $\mathcal{R}'$  mit Hilfe von drei zusätzlichen Stellen  $s_1^{(z)}, s_2^{(z)}, s_3^{(z)}$ , sodaß (PN\*) erfüllt ist. Sei

$$d = |\{(s, t) | s \in S_{\mathcal{P}'}, t \in T_{\mathcal{P}'}, s \text{ kontrollierend für } t\}| + |Q_{\mathcal{P}'}|.$$

Es gilt

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}'}(\bar{M}_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}} = \mathfrak{R}_{\mathcal{R}'}(M_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}}$$

für alle Anfangsmengen  $\bar{M}_0 \subseteq \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}'}, M_0 \subseteq \mathbb{N}^{n+3}$  mit:

$$(m(s_1), \dots, m(s_n), q_j) \in \bar{M}_0 \Leftrightarrow (\bar{m}(s_1), \dots, \bar{m}(s_n), j, (d + 1)(d + 1 - j), 0) \in M_0.$$

**Beweis:** Die Lemmata 3.1 und 3.3 transitiv genommen.  $\square$

## S3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

Aus unseren bisherigen Überlegungen folgt, daß kontrollierende Zustände sowie kontrollierende Stellen nichts an dimensionsunabhängigen Aussagen über Petri-Netze (Vektor-Additionssysteme) ändern. Insbesondere gilt:

**Korollar 3.6.** Das allgemeine Erreichbarkeitsproblem ist für gewöhnliche Petri Netze mit kontrollierenden Zuständen unabhängig von  $(PN^*)$  entscheidbar.  $\square$

Zum Schluß dieses Kapitels wenden wir uns den inhibitor-Kanten im Sinne einer eventuellen Simulation zu. Daß dies nicht immer möglich sein wird, liegt klar auf der Hand - das Erreichbarkeitsproblem wäre sonst entscheidbar. Es lohnt sich dennoch, darüber nachzudenken, ob und wann die inhibitor-Kanten wegsimuliert werden können. Oder anders gefragt: wann können wir im gewöhnlichen Petri-Netz das Feuern von Transitionen vom Leersein bestimmter Stellen abhängig machen? Laut Schaltregel für gewöhnliche Petri-Netze ist es auf den ersten Blick nicht möglich. Stellen wir uns aber eine inhibitor-Stelle  $s$  vor, von der wir wissen, daß sie für ein  $M_0$  (oder auch  $\bar{M}_0$ ) nicht größer werden kann als eine Konstante  $c \in \mathbb{N}$ . Wir könnten dann eine zusätzliche Stelle  $s^{(z)}$  nehmen, diese durch geeignete Anbindung komplementär zu der inhibitor-Stelle machen und die inhibitor-Transition nur bei  $m(s^{(z)}) = c$  feuern lassen. Die inhibitor-Kante selbst wäre dann überflüssig. Gleiches könnte man mit allen inhibitor-Kanten machen - vorausgesetzt, daß die Projektionen der Erreichbarkeitsmengen auf sämtliche inhibitor-Stellen endlich sind. Eine etwas effizientere Konstruktion beschreiben wir im nachfolgenden Korollar.

**Korollar 3.7.** Sei  $S^{(e)} \subseteq S$  mit  $\mathfrak{R}_P(\cdot) \downarrow_{\{s\}} \subseteq \{0, \dots, c\}$  für ein  $c \in \mathbb{N}$  und alle  $s \in S^{(e)}$  in einem Petri-Netz  $\mathcal{P}^{1,0}$ . Im Sinne der Projektion auf die Stellen aus  $S \setminus S^{(e)}$  kann  $\mathcal{P}^{1,0}$  durch ein Petri-Netz  $\mathcal{R}^1$  der Dimension  $n = |S \setminus S^{(e)}| + 2$  simuliert werden. Soll darüberhinaus  $(PN^*)$  gelten, dann beträgt die Dimension des  $\mathcal{R}^1$ :  $n = |S \setminus S^{(e)}| + 3$ . (Dabei entfallen zwangsläufig sämtliche Kanten, die mit den Stellen aus  $S^{(e)}$  assoziiert waren).

**Beweis:** Wir streichen sämtliche Stellen aus  $S^{(e)}$  und erweitern die Menge der kontrollierenden Zustände (falls überhaupt vorhanden) durch Hinzufügen von

$$Q = \{q_\mu \mid \mu \in \mathfrak{R}_P(\cdot) \downarrow_{\{S^{(e)}\}}\} \text{ mit } |Q_{\mathcal{R}}| = |Q_{\mathcal{P}}| + \prod_{s \in S^{(e)}} |\mathfrak{R}_P(\cdot) \downarrow_{\{s\}}|.$$

Durch geeignete Transitionenbeschriftungen  $q_\mu \rightarrow q_\nu$  sorgen wir für Zustandsveränderungen, die die Transitionen aus  $T_{\mathcal{P}}$  verursachen würden. Schließlich simulieren wir die kontrollierenden Zustände aus  $Q_{\mathcal{R}}$  (notfalls auch kontrollierende Stellen), dem Lemma 3.2 bzw. 3.3 folgend.  $\square$

§3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

---