§4. SEMILINEARE ERREICHBARKEITSMENGEN

Zu den zentralen Motiven dieser Arbeit gehört die Charakterisierung der Petri-Netz-Erreichbarkeitsmengen unter dem Blickwinkel der Semilinearität. Semilineare Erreichbarkeitsmengen sind von verhältnismäßig einfacher Struktur und machen die ansonsten unentscheidbaren Probleme entscheidbar. Es ist (algorithmisch) möglich, solche Mengen zu beschreiben und folglich auch z.B. Inklusionsfragen der Erreichbarkeitsmengen auf algorithmischem Wege zu beantworten.

Das Konzept der Semilinearität geht im wesentlichen auf die sog. Presburger Arithmetik zurück [22], wo der interessierte Leser weitere Informationen findet. Für unsere Betrachtungen reicht eine punktuelle Vorstellung dieser Theorie, die wir in den nachfolgenden Überlegungen geben wollen.

Definition 4.1. *Unter einer linearen Menge zur Basis $b \in N^n$ mit der Periodenmenge $\{p_1, \ldots, p_l\} = P \subseteq N^n$, $|P| < \infty$ verstehen wir die durch die Linearkomponente $\mathcal{L}(\cdot,\cdot)$ erzeugte Menge $L \subseteq N^n$ mit:*

$$L = \mathcal{L}(b, P) = \left\{ x \in N^n \mid \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in N,\ p_1, \ldots, p_k \in P:\ x = b + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j p_j \right\}.$$ [1]

Häufig operieren wir mit endlichen Vereinigungen solcher Mengen zu verschiedenen Basen. Wir sprechen von einer linearen Menge zu einer (endlichen) Basismenge $B \subseteq N^n$ mit den Perioden $\{p_1, \ldots, p_l\} = P \subseteq N^n$, $|B||P| < \infty$:

$$L = \mathcal{L}(B, P) = \bigcup_{b \in B} \mathcal{L}(b, B).$$

Definition 4.2. *Jede endliche Vereinigung von linearen Mengen nennen wir eine semilineare Menge. Unter $sem(N^n)$ verstehen wir das Mengensystem, bestehend aus allen semilinearen Teilmengen von N^n.*

1 Wegen der Simulierbarkeit der kontrollierenden Zustände (siehe §3) verzichten wir auf die Diskussion der Semilinearität in Multigittern $N^n \times Q$. Die Verallgemeinerung der hier vorgestellten Resultate auf Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen wird dem Leser die folgende Definition erleichtern: seien b, P wie in der Definition 4.1, sowie $Z \subseteq \{1, \ldots, |Q|\}$. Unter einer linearen Menge $\tilde{L} \subseteq N^n \times Q$ verstehen wir die Menge:

$$\tilde{L} = \mathcal{L}(b, P, Z) = \left\{ \overleftrightarrow{x} \in N^n \times Q \mid \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in N,\ z \in Z,\ p_1, \ldots, p_k \in P : \overleftrightarrow{x} = \left(\left[b + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j p_j \right], q_z \right) \right\}.$$

Semilinearität ist invariant unter Vereinigung, Durchschnitt, Komplementbildung, Translation und - was sehr wichtig ist für unsere Überlegungen - auch unter Projektion auf semilineare Mengen. Diese Eigenschaften können leicht bewiesen werden für lineare Mengen und gelten dann automatisch für deren endliche Vereinigungen [10],[22]. Darüberhinaus gilt:

Lemma 4.1. Sei l ein eindimensionales Teilgitter aus $\mathbb{N}^n$. Für jede Folge $\{L(x_j, P_j)\}$ mit $L(x_j, P_j) \subseteq l$, $P_j \subseteq P_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $P_\nu \neq \emptyset$ für ein $\nu \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} L(x_j, P_j) = \bigcup_{j=1}^{k} L(x_j, P_j) \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Beweis: *Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an:* $l = L(0, \{1\})$. *Sei* $p_\nu \in P_\nu$. *Es gibt endlich viele Äquivalenzklassen modulo* p_ν *in* l *und es gilt* $p_\nu \in P_j$ *für alle* $j \geq \nu$. *Daher muß jedes* $x \geq x_\nu$ *aus der gleichen Äquivalenzklasse in* $L(x_\nu, P_\nu)$ *enthalten sein. Es gibt aber nur endlich viele Äquivalenzklassen und endlich viele* $x < x_\nu$ *in der gleichen Klasse. Es kann also nur endlich viele* j *geben mit:*

$$x \in \left(L(x_j, P_j) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} L(x_k, P_k) \right). \qquad ¤$$

Lemma 4.2. Für alle $b \in \mathbb{N}^n$ und alle Periodenmengen $P \subseteq \mathbb{N}^n, |P| < \infty$ existiert ein n-dimensionales, gewöhnliches Vektor-Additionssystem $\mathcal{U}$ mit der Eigenschaft: $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(b) = L(b, P)$.

Beweis: *Wir setzen* $\mathcal{U} = \mathcal{P}$. *Zu jedem* $x \in L(b, P)$ *existiert eine Linearkombination von Perioden aus* P *mit* $x = \alpha_1 p_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k p_k$. *Da alle Translationsvektoren in* $\mathcal{U}$ *schwach-positiv*[2] *sind, ist jede Transitionenfolge* $\tau \in \mathcal{U}^*$ *(im äquivalenten Petri-Netz) zulässig. Folglich erreichen wir jedes* $x \in \mathbb{N}^n$ *durch* $(v_1)^{\alpha_1} \cdots (v_k)^{\alpha_k}$, *was* $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(b) \supseteq L(b, P)$ *impliziert. Auf der anderen Seite kann jedes* $\tau \in \mathcal{U}^*$ *so geordnet werden, daß es eine Linearkombination ergibt. Das bedeutet aber* $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(b) \subseteq L(b, P)$, *also unsere Behauptung.* ¤

Für semilineare Mengen ist eine solche Konstruktion vermutlich nur partiell möglich. Eines wollen wir aber unbedingt festhalten - nämlich die (etwas bedingte) Invarianz der Semilinearität unter semilinearen Anfangsmengen:

Lemma 4.3. Sei C^n die Menge aller n-dimensionalen Petri-Netze. Es gilt:

---

2 d.h. aus lauter nichtnegativen Komponenten bestehend. Siehe auch §7, Definition 7.1.

$$\forall \mathcal{P} \in \mathbf{C}^n, m_0 \in \mathbb{N}^n: \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(m_0) \in sem(\mathbb{N}^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall M_0 \in sem(\mathbb{N}^n): \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(M_0) \in sem(\mathbb{N}^n).$$

Beweis: *Da semilineare Mengen endliche Vereinigungen von linearen Mengen sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemenheit M_0 als linear ansehen, d.h. $M_0 = L(b, P)$. Wir beweisen folgende Gleichung:*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}:T}(L(b, P)) = \mathcal{R}_{\mathcal{P}:T \cup P}(b).$$

Jeden Punkt $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}:T}(L(b, P))$ (mit $L(b, P) \rightarrow^{\tau \in T^*} x$) können wir von b aus erreichen, weil es einen Punkt $y \in L(b, P)$ geben muß mit $y \rightarrow^{\tau \in T^*} x$, der durch eine (immer zulässige) Transitionenfolge $\pi \in P^*$ von b aus erreicht werden kann. Umgekehrt kann jede zulässige Transitionenfolge $\zeta \in (T \cup P)^*$ durch entsprechende Permutation auf die Form $\pi\tau$ gebracht werden, ohne ihre Zulässigkeit zu verlieren. Offensichtlich ist jeder Punkt y mit $b \rightarrow^{\pi} y$ in $L(b, P)$ enthalten. ¤

Betrachten wir noch einmal das Beispiel Abb. 1. Hier ist die Erreichbarkeitsmenge von besonders einfacher Struktur, weil sie offensichtlich unter endlichen Anfangsmengen endlich ist (also sogar linear) und semilinear unter semilinearen Anfangsmengen $M_0 \in sem(\mathbb{N}^3)$.[3] Über die Petri-Netze aus den anderen Beispielen können wir das allerdings nicht behaupten. In dem nächsten Lemma studieren wir eine nicht-semilineare Erreichbarkeitsmenge.[4]

Lemma 4.4. Die Erreichbarkeitsmengen der (mindestens) vierdimensionalen Vektor-Ersetzungssysteme mit genau einer inhibitor-Kante sind im allgemeinen nicht-semilinear. (Dabei ist stets an semilineare, insbesondere einelementige Anfangsmengen gedacht, wie in unserem Beispiel.)

Beweis: *Sei $\mathcal{V}$ das zu dem Petri-Netz aus dem Beispiel Abb.4 äquivalente Vektor-Ersetzungssystem mit genau einem inhibitor-Vektor und insgesamt vier Vektoren, die je nach Möglichkeit als Additions- bzw. Ersetzungsvektoren folgendermaßen definiert werden können:*

3 Diese Behauptung können wir uns allerdings nur dann leisten, wenn die Erreichbarkeitsmengen der dreidimensionalen Vektor-Additionssysteme stets semilinear sind. Dieses Resultat ist aber aus [25] bekannt - es gilt sogar bis zu der Dimension $n = 5$. Aussagen dieser Art studieren wir im nächsten Kapitel.

4 Vorweg: das hier betrachtete Petri-Netz ist ein Potenzierer im Sinne der WPNC-Berechenbarkeit (oder zumindest dessen Kernstück). Vgl. §6, *WPNC4*.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$v_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right];$$

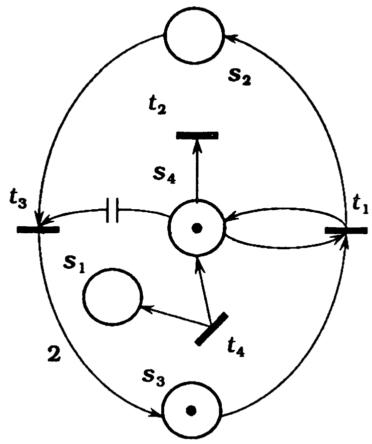

Abb.8

Als Startmenge wählen wir $\{m_0\}$ *mit:*

$$m_0 = (m_0(s_1), m_0(s_2), m_0(s_3), m_0(s_4)) = (0,0,1,1).$$

Diese einelementige Anfangsmenge ist trivialerweise linear. Seien noch:

(B1a) $0 < x_2 + x_3 \le 2^{x_1}$ *(B1b)* $x_4 > 0$

(B2a) $0 < 2x_2 + x_3 \le 2^{x_1+1}$ *(B2b)* $x_4 = 0$, *ferner sei (B12)* $x_4 \le x_1 + 1$.

Obige Relationen indizieren eine offensichtlich nicht-semilineare Menge aus $\mathbb{N}^4$. *Wir zeigen, daß diese Menge alle Punkte aus* $\mathcal{R}_V(m_0)$ *enthält. Genauer: jedes* $x \in \mathbb{N}^4$ *ist genau dann erreichbar, wenn entweder (B1a), (B1b) und (B12) oder (B2a), (B2b) und (B12) gelten. Zunächst wenden wir uns dem Teil „$\Rightarrow$" zu, d.h. wir zeigen, daß nur Punkte aus der oben definierten Menge durch* V *erreichbar sind. Die Bedingung (B12) wollen wir vorübergehend außer Acht lassen, weil Punkte, die ihr nicht genügen offensichtlich nicht erreichbar sind. Anfangs gelten (B1a) und (B1b). Den Induktionsschritt belegt die folgende Fallunterscheidung:*

1⁰) *Es gelten zunächst (B1a) und (B1b), was das Feuern von* t_3 *unmöglich macht. Beim Feuern von* t_1 *bleibt* $x_2 + x_3$ *unverändert; die* t_4 *erhöht sogar* x_1, *d.h. (B1a) und (B1b) gelten nach wie vor. Gleiches gilt für die Transition* t_2, *falls vor dem Feuern* $x_4 > 1$ *war. Galt vor dem Feuern* $x_4 = 1$, *so gilt jetzt (B2b) aber offensichtlich auch (B2a).*

2⁰) *Es gelten jetzt (B2a) und (B2b). Wegen (B2b) können t_1 und t_2 nicht feuern. Feuert die Transition t_3, dann ist (B2b) offensichtlich erfüllt und wegen* $2(x_2-1)+(x_3+2)=2x_2+x_3$ *auch (B2a). Feuert jedoch t_4, dann gilt jetzt (B1b), aber wegen* $x_2+x_3<2x_2+x_3\leq 2\cdot 2^{x_1}$ *auch (B1a).*

Im Teil „ ⇐ " zeigen wir durch vollständige Induktion nach x_1, daß jeder Punkt aus unserer Menge durch $\mathcal{V}$ erreicht werden kann.

(i) $x_1=0$. *Wegen (B12) gilt* $x_4\leq 1$. *Die einzigen Punkte, die unsere Bedingungen erfüllen sind also:*

$x^1=(0,0,1,1)$ *erreichbar durch* λ.	*Es gelten (B1a),(B1b).*
$x^2=(0,1,0,1)$ *erreichbar durch* t_1.	*Es gelten (B1a),(B1b).*
$x^3=(0,0,1,0)$ *erreichbar durch* t_2.	*Es gelten (B2a),(B2b).*
$x^4=(0,1,0,0)$ *erreichbar durch* t_1t_2.	*Es gelten (B2a),(B2b).*
$x^5=(0,0,2,0)$ *erreichbar durch* $t_1t_2t_3$.	*Es gelten (B2a),(B2b).*

(ii) *Die Behauptung gelte für alle Punkte mit* $x_1\leq a_1-1$.

(iii) *Sei* $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ *und es gelten (B1a) und (B1b). Darüberhinaus nehmen wir o.B.d.A. an, daß* $a_4=1$ *ist, weil auch andere a_4-Werte (die (B12) genügen) offensichtlich durch* $(t_4)^m(t_2)^n$ *erreichbar sind. Es gilt also* $0<a_2+a_3\leq 2^{a_1}$, *sowie* $a_4=1$ *und wir wollen zeigen, daß dieser Punkt tatsächlich erreichbar ist.*

Angenommen es gilt $0<a_2+a_3\leq 2^{a_1-1}$. *Nach der Induktionsvoraussetzung ist* $a'=(a_1-1,a_2,a_3,1)$ *erreichbar. Durch* t_4t_2 *erreichen wir unser* a.

Gilt $2^{a_1-1}<a_2+a_3\leq 2^{a_1}$, *und ist* $a_2+a_3=2^{a_1-1}+b$ *mit* $0<b\leq 2^{a_1-1}$, *dann gibt es nach der Induktionsvoraussetzung einen Schaltpfad zum* $a'=\left(a_1-1,b,2^{a_1-1}-b,1\right)$, *weil a' (B1a) und (B1b) genügt. Nun, jetzt können wir feuern: durch den Schaltpfad* $t_2(t_3)^b t_4(t_1)^{a_2}$ *erreichen wir* $\left(a_1,a_2,2^{a_1-1}+b-a_2,1\right)$, *also wieder den gewünschten Punkt, weil ja* $2^{a_1-1}+b-a_2=a_3$ *ist.*

Aus diesem Resultat folgt bereits unser Lemma, weshalb wir hier auf den Beweis der Erreichbarkeit von Punkten mit $x_4=0$ *verzichten wollen. Dieser Beweis kann ähnlich geführt werden.* ¤

Der Beweis vom Lemma 4.4 belegt implizit die gegenseitige Simulation der Petri-Netze aus den Beispielen Abb.4 und Abb.5. Zusammen mit den Erkenntnissen aus dem vorherigen Kapitel erhalten wir:

Korollar 4.5. Die Erreichbarkeitsmengen der folgenden Gebilde sind unter einelementigen Anfangsmengen im allgemeinen nicht-semilinear:

- gewöhnliche Vektor-Additionssysteme der Dimension $n \geq 6$;
- gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme der Dimension $n \geq 5$;
- gewöhnliche Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen der Dimension $n \geq 3$;
- Vektor-Ersetzungssysteme mit genau einem inhibitor-Vektor der Dimension $n \geq 4$. ¤

Wir sehen also, daß nicht-semilineare Erreichbarkeitsmengen bereits bei recht „kleinen" Petri-Netzen auftreten können. Auf der anderen Seite könnte man die Frage stellen, wie wahrscheinlich die Semilinearität ist. Die exakte Quantifizierung wäre enorm schwierig, aber man kann die heuristische Antwort wagen, daß die Erreichbarkeitsmengen der Petri-Netze doch sehr zur Semilinearität „neigen". Aus [10] ist z.B. bekannt, daß diese Eigenschaft im etwas eingeschränkten Sinne auf gewöhnliche Petri-Netze mit (PN) (Vektor-Additionssysteme) zutrifft, wenn höchstens zwei Stellen beschränkte Projektionen der Erreichbarkeitsmengen haben, und das unabhängig von der Dimension. Die Überlegungen, die zu dieser Erkenntnis geführt haben, wollen wir hier nicht wiederholen. Das für uns wichtigste Resultat halten wir im nachfolgenden Lemma fest.*

Lemma 4.6. Sei $\mathcal{V}$ ein gewöhnliches Petri-Netz mit *(PN*)* (Vektor-Additionssystem) der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Für alle Komponentenpaare $j,k \in \{1,..,n\}$, $j \neq k$ existiert eine (effektiv berechenbare) Konstante $g^{j,k} = (g_1^{j,k},..,g_n^{j,k}) \in \mathbb{N}^n$ mit $g_j^{j,k} = g_k^{j,k} = 0$ und $g_i^{j,k} \in \mathbb{N}$ für $j \neq i \neq k$, mit folgender Eigenschaft:

Die Erreichbarkeitsmengen von $\mathcal{V}$ strikt innerhalb von $G^{j,k} = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x \geq g^{j,k}\}$ (d.h. auf Schaltpfaden aus $G^{j,k}$), für alle Anfangsmengen $M_0 \in sem(G^{j,k})$ können durch semilineare Teilmengen der gesamten Erreichbarkeitsmengen von $\mathcal{V}$ eingehüllt werden. *[10]* ¤

Mit dem Begriff „Einhüllung" meinen wir stets die mengentheoretische Überdeckung von kegelförmigen Gebilden, also z.B. linearen oder semilinearen Erreichbarkeitsmengen - im Gegensatz zu Inklusionen, die im anderen Zusammenhang stehen. Ferner ist hier unbedingt zu beachten, daß sich diese Aussage nur auf eine Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ bezieht („strikt innerhalb von $G^{j,k}$"). Das gilt sowohl für die Anfangsmengen, als auch für Schaltpfade und folglich auch Erreichbarkeitsmengen. Im nächsten Kapitel arbeiten wir häufig mit derartigen Aussagen.

Es ist zwar etwas gewagt, anhand dieser Aussage weitgehende Schlußfolgerungen hinsichtlich Petri-Netz-Erreichbarkeitsmengen und deren allgemeiner Struktur zu ziehen (allenfalls im Zusammenhang mit weiteren Erkenntnissen, was im kommenden Kapitel geschehen soll). Dennoch darf sicherlich vermutet werden, daß dieses Lemma für Konstanten mit drei Komponenten gleich 0 nicht mehr gilt. Drei Stellen könnten dann ein Petri-Netz *mit kontrollierenden Zuständen simulieren, dessen Erreichbarkeitsmenge bereits bei der Dimension* $n = 3$ *nicht-semilinear sein könnte. Die Umkehrung dieser (noch) Vermutung würde aber bedeuten, daß solche Erreichbarkeitsmengen nur dann zu erwarten sind, wenn entsprechend viele Transitionen u.U. am Feuern gehindert werden - sei es durch kontrollierende Zustände, sei es durch Stellen, die nicht beliebig groß werden können. Im nächsten Kapitel werden wir die Bestätigung hierfür ableiten können.*

§4. SEMILINEARE ERREICHBARKEITSMENGEN