

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

*Das Korollar 4.5 markiert Dimensionen verschiedener Varianten von Petri-Netzen, in denen die Erreichbarkeitsmengen nicht-semilinear sein können. Die Frage, die wir uns stellen wollen, lautet, ob die Semilinearität obligatorisch ist in hinreichend kleinen Dimensionen. Kann dieser Sachverhalt für eine bestimmte Klasse von Petri-Netzen bis zu einer Dimension  $n^* \in \mathbb{N}$  bewiesen werden und existieren Petri-Netze aus der gleichen Klasse mit  $n = n^* + 1$ , deren Erreichbarkeitsmengen nicht-semilinear sind, so sprechen wir von einer dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenze  $n^* \in \mathbb{N}$  für diese Klasse.*

*Aussagen dieser Art wurden in [10] für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme (auch mit kontrollierenden Zuständen) bewiesen. Wir wollen untersuchen, ob und inwieweit kontrollierende Stellen und Zustände sowie inhibitor-Kanten die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen verschieben, wobei wir uns aus mehrfach genanntem Grund hauptsächlich für Petri-Netze mit genau einer inhibitor-Kante interessieren.*

*Zunächst zitieren wir die beiden Hauptsätze aus [10], die für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme, mit oder ohne kontrollierende Zustände, sowohl dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenzen, als auch die effektive Berechenbarkeit der (semilinearen) Erreichbarkeitsmengen beinhalten.<sup>1</sup>*

**Lemma 5.1.** Die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme mit kontrollierenden Zuständen beträgt  $n^* = 2$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_u(\vec{M}_0) \in \text{sem}(\mathbb{N}^2 \times Q) \text{ für alle } \vec{M}_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^2 \times Q).^2$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar. [10]  $\square$

**Lemma 5.2.** Die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme ohne kontrollierende Zustände beträgt  $n^* = 5$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_u(M_0) \in \text{sem}(\mathbb{N}^5) \text{ für alle } M_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^5).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar. [10]  $\square$

---

<sup>1</sup> Zu den Konsequenzen der Semilinearität gehört, neben der Berechenbarkeit der Erreichbarkeitsmengen, stets u.a. die Entscheidbarkeit des Gleichheits- und Inklusionsproblems der Erreichbarkeitsmengen. Siehe dazu Fachliteratur.

<sup>2</sup> vgl. Fußnote 1, Seite 35.

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

Ausgehend vom Lemma 5.2 beobachten wir, daß kontrollierende Zustände eine gewaltige Verschiebung der Semilinearitätsgrenze verursachen. Erinnern wir uns an Lemma 4.4 und Beispiel Abb. 2, so stellen wir fest, daß kontrollierende Stellen ebenfalls die Semilinearitätsgrenze verschieben (mindestens um 1). Auf der anderen Seite wissen wir aus dem §3, daß kontrollierende Zustände ein stärkeres Mittel sind als kontrollierende Stellen, die sich folglich in dieser Hinsicht nicht stärker auswirken dürften. Es bleibt nur noch die Frage, ob kontrollierende Stellen und Zustände zusammengenommen mehr bewirken können, als exklusiv eingesetzt.

**Lemma 5.3.** Die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen sind für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme - jeweils mit kontrollierenden Zuständen - gleich und betragen  $n^* = 2$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_v(\vec{M}_0) \in \text{sem}(N^2 \times Q) \text{ für alle } \vec{M}_0 \in \text{sem}(N^2 \times Q).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar.

**Beweis:** Wegen Lemma 3.1 ist der in [10] vorgestellte Algorithmus ohne Einschränkungen auf gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen anwendbar.  $\square$

Kontrollierende Stellen bleiben demnach ohne Einfluß auf die Semilinearitätsgrenze der gewöhnlichen Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen. In Anbetracht der Erkenntnisse aus §3 konnte dieses vermutet werden - ist aber eher auf das sehr kleine Multigitter  $N^2 \times Q$  zurückzuführen. In den nachfolgenden Überlegungen wenden wir uns der Frage zu, ob und wieviele inhibitor-Kanten diesen Sachverhalt verändern können. Außerdem versuchen wir die Bedeutung von inhibitor-Transitionen bzw. inhibitor-Stellen in diesem Zusammenhang zu klären.

**Theorem 5.4.** Die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen sind für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme - jeweils mit kontrollierenden Zuständen und genau einer inhibitor-Kante - gleich und betragen  $n^* = 2$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_v(\vec{M}_0) \in \text{sem}(N^2 \times Q) \text{ für alle } \vec{M}_0 \in \text{sem}(N^2 \times Q).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar.

**Beweis:** Zunächst machen wir einige Vorbereitungen. Unter einer inhibitor-Hyperebene  $\eta^1 \subseteq N^n \times Q$  verstehen wir die Menge aller Punkte (Multimarkierungen) aus  $N^n \times Q$ , bei denen die inhibitor-Transition aktiviert ist. Offensichtlich gilt  $\eta^1 \in \text{sem}(N^n \times Q)$ . Die Menge  $\text{shift}^1(\vec{M}) = \vec{M} \cup \{\vec{x} \in N^n \times Q \mid \exists \vec{y} \in \vec{M} : \vec{y} \rightarrow^1 \vec{x}\}$  für eine Menge  $\vec{M} \subseteq N^n \times Q$  bezeichnen wir als inhibitor-Translation. Sei  $\mathcal{U}^1$  ein Vektor-Additionssystem mit genau einer inhibitor-

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

## ALGORITHMUS A1

```

input ( $\mathcal{U}', \{(x_0, P_0, q_0)\}$ ); /*  $\mathcal{U}'$ -ein zweidimensionales Vektor-Additionssystem mit
    kontrollierenden Zuständen und genau einer inhibitor-
    Kante; das Tupel  $(x_0, P_0, q_0)$  kennzeichnet entsprechend
    die Basis, Periodenmenge und den kontrollierenden Zu-
    stand einer linearen Anfangsmenge  $\tilde{L}_0 = (L(x_0, P_0), q_0) \subseteq
    \subseteq \mathbb{N}^2 \times Q$ . O.B.d.A. nehmen wir an:  $q_0 = q^a(t')$ , d.h.  $\tilde{L}_0 \subseteq \eta'$ .
    */

begin /* Die Grundstruktur ist ein Baum, dessen Knoten jeweils  $\text{set}(\cdot)$ ,  $\text{tag}(\cdot)$ , sowie
    Verweise auf den Vorgänger und den (die) Nachfolger beinhalten. */

1) let  $\text{set}(\text{root}) = \{(x_0, P_0, q^a(t'))\}$ ,  $\text{tag}(\text{root}) = \text{open}$ ; /* root hat keine
    Vorgänger */

2) on pick leaf:  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{open}$ ; /* leaf hat keine Nachfolger */
    if not exists go e; /* alle Pfade geschlossen, Ausgabe */

3) let  $L = [\text{r10}(\text{shift}'(\text{set}(\text{leaf}))) \cap \eta']$ ; /* r10() ist der aus [10] bekannte
    Algorithmus, der hier für  $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \setminus \{t'\}$  aufgerufen wird. */

4) let  $L' = \{(x_j, P_j, q^a(t')) \in L \mid P_j = \emptyset\}$ ,  $L'' = L \setminus L'$ ;

5) for each  $((x_j, \emptyset, q^a(t')) \in L')$  begin

6) create succ; let  $\text{leaf} \xrightarrow{\text{next}} \text{succ}$ ,  $\text{set}(\text{succ}) = (x_j, \emptyset, q^a(t'))$ ;
    /* succ wird direkter Nachfolger von leaf. */

7) if  $\text{set}(\text{leaf}) = (x, \emptyset, q^a(t'))$  &  $\text{set}(\text{succ}) = (y, \emptyset, q^a(t'))$  &  $x < y$ 
    let  $\text{set}(\text{succ}) = (x, \{y - x\}, q^a(t'))$ ;

8) end;

9) if  $L'' \neq \emptyset$  create succ; let  $\text{leaf} \xrightarrow{\text{next}} \text{succ}$ ,  $\text{set}(\text{succ}) = L''$ ;

10) for each (current leaf) begin

11) if  $\text{set}(\text{leaf}) \subseteq \left[ \bigcup_{\text{ancestors}(\text{leaf})} \text{set}(\text{ancestor}) \right]$  let  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{closed}$ 
    else  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{open}$ ;

12) end, go on;

e output ( $E = \bigcup_{\text{nodes}} \text{set}(\text{leaf})$ ); /* nichtdisjunkte Vereinigung */

end;

```

Transition  $t^i$  und der inhibitor-Stelle (o.B.d.A.)  $s_1$ .<sup>3</sup> Mit Hilfe des Algorithmus  $\mathfrak{A}1$  berechnen wir zunächst die Erreichbarkeitsmenge des  $\mathcal{U}^i$  auf der inhibitor-Hyperebene, für eine o.B.d.A. lineare Anfangsmenge  $\vec{L}_0 = \overline{L(x_0, q_0)} = (L(x_0, q_0), q_0) \subseteq N^2 \times Q$ . Dabei können wir natürlich nicht direkt mit unendlichen, wenn auch semilinearen oder gar linearen Mengen operieren. Als geeignete Datenstruktur verwenden wir daher Mengen, die ausschließlich aus Elementen  $\lambda_j = (b_j, P_j, q_j)$  bestehen, wo die Komponenten von  $\lambda_j$  entsprechend die Basis, Periodenmenge und den kontrollierenden Zustand einer linearen Menge  $\overline{L(x_j, P_j)} = (L(x_j, P_j), q_j)$  aus  $N^2 \times Q$  darstellen. Auch die in Zeile e ausgegebene Menge (falls es zu dieser Ausgabe überhaupt kommt) kann nicht die Erreichbarkeitsmenge selbst enthalten, sondern höchstens deren Spezifikation im o.e. Sinne. Den Zusammenhang zwischen unserer Datenstruktur und den Mengen, die sie beschreibt, beleuchtet die folgende Gleichung:

$$\vec{M} = \bigcup_{(x_j, P_j, q_j) \in M} \overline{L(x_j, P_j)} = \bigcup_{(x_j, P_j, q_j) \in M} (L(x_j, P_j), q_j).$$

Der aus [10] bekannte Algorithmus, der als Prozedur in Zeile 3) aufgerufen wird ( $r10()$ ), arbeitet ebenfalls mit dieser Datenstruktur. Ferner können Operationen, wie Vereinigung Durchschnitt und Translation von Mengen aus  $N^n \times Q$  (in unserem Fall aus  $N^2 \times Q$ ), problemlos auf dem Boden dieser Datenstruktur durchgeführt werden. Aus diesem Grund wollen wir die weitere Diskussion auf die Mengen selbst und nicht auf deren Spezifikationen beziehen.

**Lemma 5.4.1.** Der Algorithmus  $\mathfrak{A}1$  hält in endlicher Zeit für alle Vektor-Additionssysteme  $\mathcal{U}^i$  der Dimension  $n \leq 2$  mit genau einer inhibitor-Kante und für alle Anfangsmengen  $\vec{M}_0 \in \text{sem}(N^2 \times Q)$ .<sup>4</sup>

**Beweis:** Induktiv nach der Länge des (Baum-) Pfades folgern wir zunächst, daß der Algorithmus  $r10()$  ausschließlich auf Translationen sowie Durchschnitte mit  $\eta^i$  von Mengen angewendet wird, die er selbst geliefert hat - also auf semilineare Mengen. Und weil  $\mathcal{U}$  ein gewöhnliches Vektor-Additionssystem ist, enden diese Aufrufe in endlicher Zeit. Ferner arbeitet der Algorithmus  $r10()$  mit den gleichen Datenstrukturen und liefert stets endliche Mengen  $\{(x_j, P_j, q_j)\}_{1 \leq j \leq m}$  [10]. Demnach durchläuft die Schleife <sup>5)-8)</sup> jeweils nur endlich viele Linearkomponenten aus  $L'$  (mit leeren Periodenmengen). Die gleiche Induktion belegt darüberhinaus, daß der fan-out des erzeugten Baumes beschränkt ist, weshalb wir davon ausgehen können, daß es stets nur endlich viele Blätter gibt, die die Schleife <sup>10)-12)</sup> zu durchlaufen hat. Schließlich sind offensichtlich alle Operationen in den einzelnen Zeilen in endlicher Zeit durchführbar, weil wir nur mit endlichen Spezifikationen linearer bzw. semilinearere Mengen arbeiten und weil die Semilinearität invariant ist unter diesen Ope-

<sup>3</sup> In der Hoffnung, den Leser nicht zu verwirren, sprechen wir von Transitionen und Stellen in einem Vektor-Additionssystem. Es ist dabei stets an das äquivalente Petri-Netz zu denken.

<sup>4</sup> Die Anfangsmenge muß nicht unbedingt linear sein. Der Algorithmus  $r10()$  ist selbstverständlich auch auf semilineare Anfangsmengen anwendbar [10] und wird in unserem Algorithmus für solche Mengen aufgerufen (Translationen linearer Mengen sind i.a. semilinear).

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

rationen. Unsere Behauptung folgt dann sofort, wenn der errechnete Baum endliche Tiefe hat. Dazu betrachten wir einen Pfad aus diesem Baum und nehmen an, daß er unendlich ist, d.h. zu jedem Zeitpunkt des Berechnungsvorgangs stets  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{open}$  für den augenblicklich letzten Knoten auf diesem Pfad gilt. Zunächst analysieren wir die in Zeile <sup>4</sup>) vorgenommene Aufspaltung der zuvor errechneten Menge  $L$ . Die bereits angesprochene Induktion nach der Länge des betrachteten Pfades läßt darauf schließen, daß die Mengen, die auf diesem Pfad vorkommen, entweder nur einzelne Punkte (d.h. Linearkomponenten mit leeren Periodenmengen) oder endlich viele Linearkomponenten mit  $P \neq \emptyset$  enthalten können. Es gilt sogar mehr. Nehmen wir an, daß ein Knoten  $\text{node}$  eine Menge  $\text{set}(\text{node}) = \{(x, \{p\}, q^a(t'))\}$  enthält und der Aufruf in Zeile <sup>3</sup>) eine Komponente  $(y, \emptyset, q^a(t'))$  liefert. Dann müßte aber ein Punkt  $\vec{x}_1 \in \overline{L(x, \{p\})}$  existieren, mit  $\vec{x}_1 \rightarrow \vec{y}$ . Für Punkte  $\vec{z}$  mit  $z > x_1$  wäre aber zu folgern:  $\vec{z} \rightarrow \overline{y + z - x_1}$ . Dieser Widerspruch, zusammen mit der Induktion nach der Mächtigkeit der Periodenmenge und Anzahl der Linearkomponenten in  $\text{set}(\text{node})$  bedeutet, daß einzelne Punkte nicht mehr erreichbar sind, sobald ein  $\text{set}(\text{node})$  mit mindestens einer Periode berechnet worden ist. In Zeile <sup>4</sup>) wird dann folglich keine Aufspaltung mehr vorgenommen, was für den betrachteten Pfad heißt, daß er nicht mehr gabelt. Auf jeden Fall können wir davon ausgehen, daß für zwei aufeinanderfolgende Knoten  $\text{node}_1$  und  $\text{node}_2$

$$\text{set}(\text{node}_1) \subseteq \text{set}(\text{node}_2)$$

und für die inneren Knoten (bis auf den augenblicklich letzten) sogar

$$\text{set}(\text{node}_1) \subset \text{set}(\text{node}_2)$$

gelten muß. (Letzteres folgern wir einmal mehr aus der Induktion nach der Pfadlänge). Wir haben also eine Folge von semilinearen und stets expandierenden Mengen aus der inhibitor-Hyperebene  $\eta'$ , die ihrerseits ein eindimensionales und damit wohlgeordnetes Gitter ist. Wegen Lemma 4.1 heißt es aber, daß die letzte Inklusion nach endlicher Zeit nicht mehr gegeben ist – solche Pfade werden dann in Zeile <sup>11</sup>) „geschlossen“. Damit kann unser Pfad nur dann unendlich sein, wenn er ausschließlich Linearkomponenten mit leeren Periodenmengen, also einzelne Punkte enthält. Diese Punkte müssen aber von Knoten zu Knoten verschieden sein (andernfalls wird in Zeile <sup>11</sup>) sofort  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{closed}$  gesetzt) und darüberhinaus müßten sie in Richtung weg von der Wurzel immer kleiner werden (sonst kommt in Zeile <sup>7</sup>) eine Periode hinzu). Eine permanent fallende Folge kann es aber nicht geben (Satz von Dickson). Die Pfade sind demnach endlich und wegen des Lemmas von König auch der ganze Baum, dessen fan-out ja beschränkt ist.  $\square$

**Lemma 5.4.2.** Für alle Vektor-Additionssysteme  $\mathcal{U}'$  mit genau einer inhibitor-Kante, der Dimension  $n \leq 2$  und alle Anfangsmengen  $\vec{M}_0 \in \text{sem}(N^2 \times Q)$  hält der Algorithmus  $\mathfrak{A}1$  nur dann, wenn gilt:

$$\vec{E} = \bigcup_{(x, P, q) \in E} (L(x, P), q) = \mathfrak{X}_{\mathcal{U}'}(\vec{M}_0) \cap \eta'.$$

**Beweis:** Wir zeigen  $\vec{E} \supseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{U}'}(\vec{M}_0) \cap \eta'$  im Teil a) und  $\vec{E} \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{U}'}(\vec{M}_0) \cap \eta'$  im Teil b).

- a) Wir betrachten den errechneten Baum und beweisen unsere Behauptung durch vollständige Induktion nach der Länge  $|\tau|$  einer (zulässigen) Schaltfolge  $\tau \in T^*$ . Nichts ist zu zeigen für  $|\tau| = 0$ . Nehmen wir an (und das ist unsere Induktionsvoraussetzung), daß der Algorithmus  $\mathfrak{A}$  erst dann hält, wenn alle durch Schaltpfade der Länge  $|\tau| \leq k \in \mathbb{N}$  erreichbaren Punkte (aus der inhibitor-Hyperebene) bereits in  $\vec{E}$  enthalten sind, d.h.  $\vec{E} \supseteq \{(x, q^a(t')) \mid \vec{M}_0 \xrightarrow{\tau} (x, q^a(t')), \tau \in T^*, |\tau| \leq k\}$ . Weiter nehmen wir an, daß ein Punkt  $(y, q^a(t')) \in \mathbb{N}^2 \times Q$  nicht in  $\vec{E}$  enthalten ist, obwohl der Algorithmus gehalten hat und obwohl dieser Punkt auf einem Schaltpfad  $\omega \in T^*$  der Länge  $|\omega| = k + 1$  von  $\vec{M}_0$  aus erreichbar ist. Es kann aber nur dann der Fall gewesen sein, wenn für alle Blätter  $\text{set}(\text{leaf})$  in der Vereinigung ihrer Vorgänger enthalten waren (in Zeile 11)), was der Definition von  $\text{shift}^1(\cdot)$  widerspricht, wenn die letzte Transition in  $\omega$  gerade die inhibitor-Transition war. War die letzte Transition in diesem Schaltpfad eine gewöhnliche Transition  $t \neq t'$ , dann müßte sie der Algorithmus  $\Gamma 10()$  im letzten Durchlauf nicht berücksichtigt haben. Daraus folgt aber, daß auch Punkte  $(y, q^a(t'))$  mit  $\vec{M}_0 \xrightarrow{\omega} (y, q^a(t'))$  in  $\vec{E}$  enthalten sind, was uns den Induktionsschritt liefert.
- b) Offensichtlich erreichen wir in  $\mathcal{U}$  nur Punkte aus der Erreichbarkeitsmenge des  $\mathcal{U}'$ . Zu überlegen bleibt nur, ob die in der Zeile 7) definierte Erweiterung von  $\text{set}(\text{succ})$  immer nur erreichbare Punkte enthält. Diese Erweiterung wird allerdings nur dann vorgenommen, wenn der Punkt  $(y, q^a(t'))$  von  $(x, q^a(t'))$  aus erreichbar ist, sagen wir durch ein  $\tau \in T^*$ . Damit gilt für alle  $c \in \mathbb{N}$ :

$$\vec{x} = (x, q^a(t')) \xrightarrow{(\tau)^c} (x + c(y - x), q^a(t')) = \overline{x + c(y - x)} \in (L(x, y - x), q^a(t')),$$

falls die Bedingung in Zeile 7) erfüllt ist. Unsere Behauptung folgt dann sofort durch Induktion nach der Länge des (Baum-) Pfades.  $\square$

Aus  $\mathfrak{R}_{\mathcal{U}'}(\vec{L}_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{U}'}(\vec{E})$  berechnen wir abschließend die gesamte Erreichbarkeitsmenge durch einmaligen Aufruf von  $\Gamma 10()$ . Wegen Lemma 3.1 und der offensichtlichen algorithmischen Durchführbarkeit der dort beschriebenen Konstruktion ist die Eigenschaft (PN\*) belanglos (unser Algorithmus kann problemlos so modifiziert werden, daß er auch im Falle der Vektor-Ersetzungssysteme direkt anwendbar wird). Ferner könnte der Algorithmus  $\mathfrak{A}$  auf jede Linearkomponente einer semilinearen Anfangsmenge separat angewendet werden. Wir erhalten folglich die Invarianz der Semilinearität unter semilinearen Anfangsmengen für die hier betrachtete Petri-Netz Variante, also die Berechenbarkeit der Erreichbarkeitsmengen für alle  $\vec{M}_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^2 \times Q)$ .  $\square$

Der Algorithmus  $\mathfrak{A}$  1 kombiniert die inhibitor-Translation mit der Berechnung der Erreichbarkeitsmengen unter Ausschluß der inhibitor-Transition. Diese Vorgehensweise kann als die allgemeine Berechnungsstrategie für Petri-Netz-Erreichbarkeitsmengen an-

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

## ALGORITHMUS A2

```

input( $U^{k_1}, \{(x_0, P_0, q_0)\}$ ); /*  $U^{k_1}$  -ein zweidimensionales Vektor-Additionssystem mit
kontrollierenden Zuständen, beliebig vielen inhibitor-
Kanten, und genau einer inhibitor-Stelle. O.B.d.A. nehmen
wir an:  $q_0 = q^a(t')$ . */

procedure rset( $U^{k_1}, \bar{M}$ );

begin

1) let set(root) =  $\{(x_0, P_0, q^a(t'))\}$ , tag(root) = open; /* root hat keine
Vorgänger */

2) on pick leaf: tag(leaf) = open; /* leaf hat keine Nachfolger */
if not exists go e; /* alle Pfade geschlossen, Ausgabe */

3) if  $k = 1$  let  $L = [r10(\text{shift}'(\text{set}(leaf))) \cap \eta^1]$ ; /*  $U^{0_1} = U$  */
else let  $L = [rset(U^{(k-1)_1}, \text{shift}'(\text{set}(leaf))) \cap \eta^1]$ ;

4) let  $L' = \{(x_j, P_j, q^a(t')) \mid P_j = \emptyset\}$ ,  $L'' = L \setminus L'$ ;
5) for each  $((x_j, \emptyset, q^a(t')) \in L')$  begin
6) create succ; let leaf  $\xrightarrow{\text{next}}$  succ, set(succ) =  $(x_j, \emptyset, q^a(t'))$ ;
/* succ wird direkter Nachfolger von leaf. */
7) if set(leaf) =  $(x, \emptyset, q^a(t'))$  & set(succ) =  $(y, \emptyset, q^a(t'))$  &  $x < y$ 
let set(succ) =  $(x, \{y - x\}, q^a(t'))$ ;
8) end;
9) if  $L'' \neq \emptyset$  create succ; let leaf  $\xrightarrow{\text{next}}$  succ, set(succ) =  $L''$ ;
10) for each (current leaf) begin
11) if set(leaf)  $\subseteq \left[ \bigcup_{\text{ancestors}(leaf)} \text{set}(ancestor) \right]$  let tag(leaf) = closed
else tag(leaf) = open;
12) end, go on;
e return( $E = \bigcup_{\text{leaves}} \text{set}(leaf)$ ); /* nichtdisjunkte Vereinigung */

end;

```

gesehen werden - auch dann, wenn das gegebene Petri-Netz mehrere inhibitor-Kanten enthält. Die inhibitor-Translation kann nämlich auch hinsichtlich mehrerer inhibitor-Transitionen definiert werden. Das Hauptproblem besteht in der Frage, ob ein solcher Algorithmus in endlicher Zeit seine Arbeit verrichten würde. Kann diese Frage nicht beantwortet werden, dann gibt es auch keine Garantie für die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen, weil eine unendliche Vereinigung von semilinearen Mengen nicht unbedingt semilinear ist. (Das Petri-Netz aus dem Beispiel Abb.4 ist eine Bestätigung hierfür.)

Allerdings ist die inhibitor-Hyperebene im zweidimensionalen Gitter stets wohlgeordnet - unabhängig von der Anzahl der inhibitor-Kanten. Das Lemma 4.1 greift also auch in diesem Falle. Dieser Umstand läßt aber noch nicht darauf schließen, daß in diesem „Minigitter“ auch weitere inhibitor-Kanten nichts an der Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen ändern würden, denn das Lemma 4.1 ist nur dann von Bedeutung, wenn aus  $(x, q) \rightarrow^* (y, q)$  mit  $y > x$  die Erreichbarkeit von  $(x, \{y-x\}, q)$  gefolgert werden kann. Letzteres ist aber nur dann möglich, wenn die inhibitor-Hyperebene mit nur einer Gitterachse einen nichtleeren Durchschnitt hat (ein geeignetes Gegenbeispiel werden wir noch ausführlich diskutieren - siehe Abb.9). Für Petri-Netze bedeutet es zwar beliebig viele inhibitor-Kanten und inhibitor-Transitionen, aber nur eine inhibitor-Stelle. Gerade diesem Spezialfall wollen wir uns jetzt zuwenden. Unserer Berechnungsstrategie folgend, könnte man die inhibitor-Translation hinsichtlich aller inhibitor-Transitionen definieren und die Erreichbarkeitsmengen ähnlich wie im Algorithmus A1 berechnen. Wir gehen hier einen anderen Weg und versuchen einen rekursiven Ansatz. Zunächst beobachten wir, daß aufgrund der Spezifik der hier betrachteten Petri-Netze  $\mathcal{U}^k$  mit  $k$  sowohl die Anzahl der inhibitor-Kanten, als auch die der inhibitor-Transitionen gemeint ist. Der Algorithmus A2 berechnet die Erreichbarkeitsmenge von  $\mathcal{U}^k$  rekursiv, die inhibitor-Transitionen nacheinander eliminierend.

**Theorem 5.5.** Die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen sind für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme - jeweils mit kontrollierenden Zuständen, beliebig vielen inhibitor-Kanten und genau einer inhibitor-Stelle - gleich und betragen  $n^* = 2$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{U}^k}(\bar{M}_0) \in \text{sem}(\mathbb{N}^2 \times Q) \text{ für alle } \bar{M}_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^2 \times Q).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar.

**Beweis:** Durch Induktion nach der Anzahl der inhibitor-Transitionen. Der Induktionsanfang ist für  $k=0$  trivial, für  $k=1$  ist es gerade das Lemma 5.4. Die Lemmata 5.4.1 und 5.4.2 liefern den Induktionsschritt, wenn wir auf  $\text{rset}(\mathcal{U}^{(k-1)}, \cdot)$ , statt auf  $\text{rlo}(\cdot)$  zurückgreifen. Laut Induktionsvoraussetzung berechnet  $\text{rset}(\mathcal{U}^{(k-1)}, \cdot)$  die (stets semilinearen) Erreichbarkeitsmengen unter Ausschluß einer beliebigen inhibitor-Transition und folglich gelten 5.4.1 und 5.4.2 auch für den Algorithmus A2. □

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

## ALGORITHMUS A2'

```

input( $U^{k_1}, \{(x_0, P_0, q_0)\}$ ); /*  $U^{k_1}$  - ein zweidimensionales Vektor-Additionssystem mit
    kontrollierenden Zuständen, vielen inhibitor-Kanten und
    genau einer inhibitor-Stelle.
    */

procedure rset( $U^{k_1}, \vec{M}$ );

begin

1) let set(root) =  $\{(x_0, P_0, q_0)\}$ , tag(root) = open; /* root hat keine
    Vorgänger */

2) on pick leaf: tag(leaf) = open; /* leaf hat keine Nachfolger */
    if not exists go e; /* alle Pfade geschlossen, Ausgabe */

3) if  $k = 1$  let  $L = [r10(\text{shift}^1(\text{set}(\text{leaf})))]$ ; /*  $U^{0_1} = U$  */
    else let  $L = [rset(U^{(k-1)}, \text{shift}^1(\text{set}(\text{leaf})))]$ ;

4) let  $L' = \{(x_j, P_j, q_j) \mid P_j = \emptyset\}$ ,  $L'' = L \setminus L'$ ;

5) for each  $((x_j, \emptyset, q_j) \in L')$  begin

6) create succ; let  $\text{leaf} \xrightarrow{\text{next}} \text{succ}$ , set(succ) =  $(x_j, \emptyset, q_j)$ ;
    /* succ wird direkter Nachfolger von leaf. */

7) if set(leaf) =  $(x, \emptyset, q_j)$  & set(succ) =  $(y, \emptyset, q_j)$  &  $x < y$ 
    let set(succ) =  $(x, \{y - x\}, q_j)$ ;

8) end;

9) if  $L'' \neq \emptyset$  create succ; let  $\text{leaf} \xrightarrow{\text{next}} \text{succ}$ , set(succ) =  $L''$ ;

10) for each (current leaf) begin

11) if set(leaf)  $\subseteq \left[ \bigcup_{\text{ancestors}(\text{leaf})} \text{set}(\text{ancestor}) \right]$  let tag(leaf) = closed
    else tag(leaf) = open;

12) end, go on;

e return( $E = \bigcup_{\text{nodes}} \text{set}(\text{leaf})$ ); /* nichtdisjunkte Vereinigung */

end;

```

Der Algorithmus  $\mathcal{A}2$  kann auch dahingehend modifiziert werden, daß die Berechnung der Erreichbarkeitsmenge von  $U^k$  direkt erfolgt, d.h. ohne zuerst deren Durchschnitt mit der inhibitor-Hyperebene zu ermitteln. Die in der Zeile  $3$ ) errechnete Menge enthält i.a. auch Linearkomponenten mit  $q \neq q^a(t')$ , die dennoch in  $L''$ , bzw.  $L'$  übernommen werden können (was im Algorithmus  $\mathcal{A}2$  nicht geschieht). Der Leser kann leicht nachprüfen, daß die Lemmata 5.4.1 und 5.4.2 (in entsprechend abgeänderter Form) auch für den Algorithmus  $\mathcal{A}2'$  gelten. Die in Zeile e) ausgegebene Menge spezifiziert bereits die zu berechnende Erreichbarkeitsmenge des  $U^k$ . (Hinweis: die inhibitor-Translation für Punkte mit  $q \neq q^a(t')$  ist die Identität).

Wir müssen nur noch die Frage klären, ob die Einschränkung auf nur eine inhibitor-Stelle aus dem vorangegangenen Theorem tatsächlich erforderlich ist. Das Petri-Netz aus Abb.9 ist beispielhaft dafür, daß - trotz wohlgeordneter inhibitor-Hyperebene - das Lemma 4.1 u.U. gar nicht zur Geltung kommt. Daraus gewinnen wir eine weitere dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze:

**Theorem 5.6.** Die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen sind für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme - jeweils mit kontrollierenden Zuständen und beliebig vielen inhibitor-Kanten - gleich und betragen  $n^* = 1$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_{q^k}(\vec{M}_0) \in \text{sem}(N^1 \times Q) \text{ für alle } \vec{M}_0 \in \text{sem}(N^1 \times Q).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar.

**Beweis:** Die Semilinearität in  $N \times Q$  folgt sofort aus dem Theorem 5.5. Auf der anderen Seite besitzt das Petri-Netz aus Abb.9 eine offensichtlich nicht-semilineare Erreichbarkeitsmenge. Der Leser kann leicht nachprüfen, daß in jedem Zustand genau eine Transition aktiviert ist. Die Erreichbarkeitsmengen auf den Gitterachsen (in jedem kontrollierenden Zustand) können durch  $\{(2)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  spezifiziert werden.  $\square$

**Korollar 5.7.** Die Erreichbarkeitsmengen der fünfdimensionalen Vektor-Additionssysteme, sowie der vierdimensionalen Vektor-Ersetzungssysteme - jeweils mit mindestens zwei inhibitor-Vektoren - sind bereits unter einelementigen Anfangsmengen im allgemeinen nicht-semilinear.  $\square$

Wir sehen also, daß die in [10] ermittelte Semilinearitätsgrenze durch zwei inhibitor-Kanten auf jeden Fall tangiert wird. Gleiches gilt für Vektor-Ersetzungssysteme - letzteres werden wir allerdings erst nach weiteren Überlegungen folgern können (die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für gewöhnliche Vektor-Ersetzungssystem ohne kontrollierende Zustände ist vorerst nicht bekannt).



Mit den bisher gewonnenen Resultaten können wir zufrieden sein. Für die Klasse der Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen haben wir exakte, dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenzen in Abhängigkeit von der Anzahl der inhibitor-Kanten ermittelt. Ferner haben wir festgestellt, daß zur Verschiebung der Semilinearitätsgrenze gegenüber den gewöhnlichen Petri-Netzen (mit kontrollierenden Zuständen) zwei inhibitor-Kanten erforderlich sind. Und schließlich haben wir gelernt, daß im Hinblick auf die Semilinearitätsgrenzen die Anzahl der inhibitor-Stellen adäquater ist, als die der inhibitor-Kanten, oder gar der inhibitor-Transitionen.

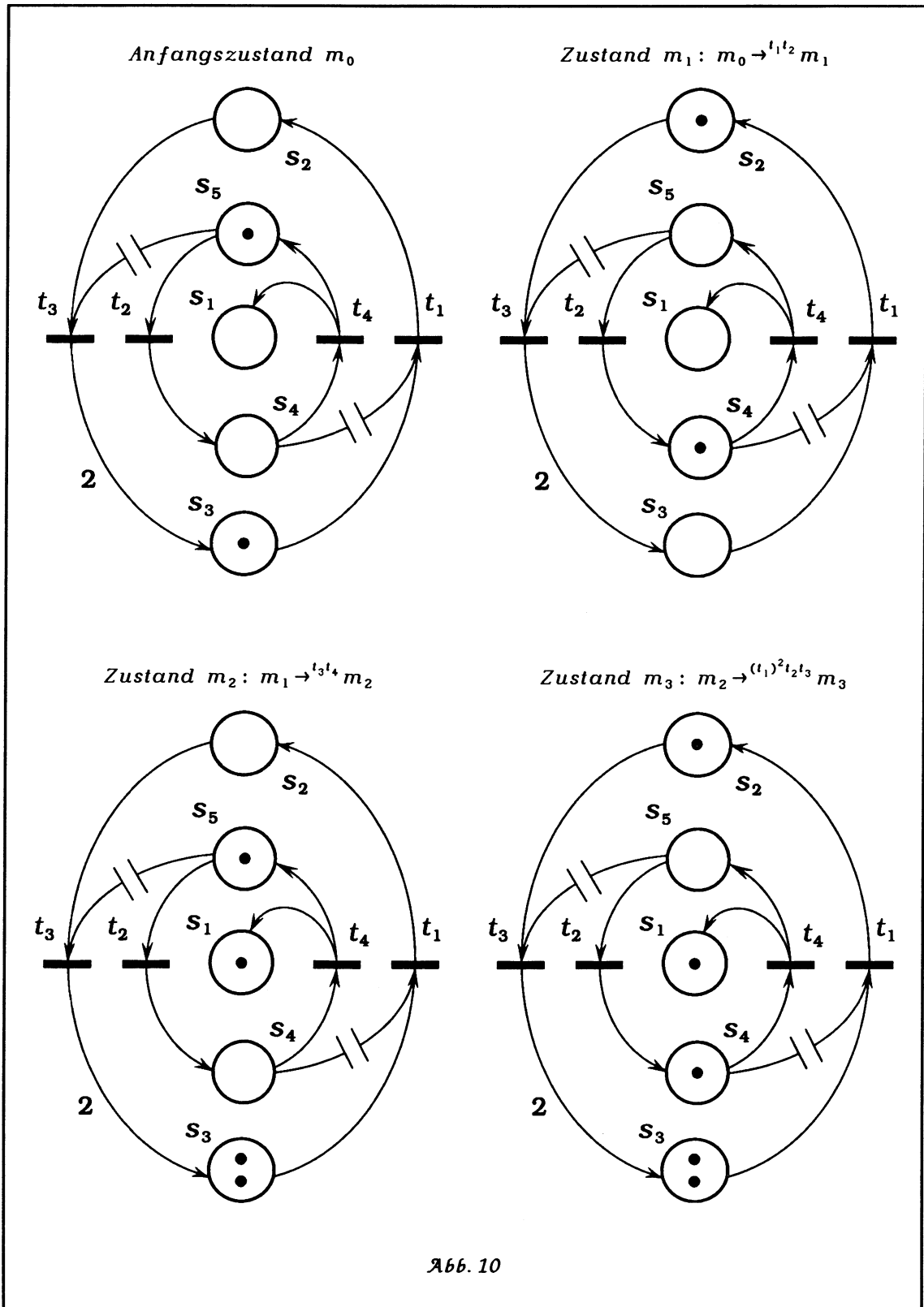
Weiter darf vermutet werden, das die qualitative Verstärkung des Grundmodells in Form von inhibitor-Kanten nicht gleichbedeutend ist mit einem wirksamen Kompaktierungsmittel<sup>5</sup> - schon gar nicht, wenn nur eine inhibitor-Kante zur Verfügung steht. Nicht-semilineare Erreichbarkeitsmengen sind dann erst im dreidimensionalen Gitter möglich, und darüberhinaus benötigen wir weitere Stellen, um die wohl kaum entbehrlichen kontrollierenden Zustände zu simulieren. Letzteres ist nur eine von zwei Fragen, die sich dabei aufdrängen. Weiter müssen wir uns fragen, welche Petri-Netze (mit kontrollierenden Zuständen und nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen) die einfachsten sind im Hinblick auf die eventuelle Simulation. Ist es vielleicht das Petri-Netz aus dem Beispiel Abb. 5? (das Petri-Netz Abb. 9 lassen wir bewußt außer Betracht, weil es bereits zwei inhibitor-Kanten enthält). Die positive Beantwortung beider Fragen würde das Problem der dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen auf die Simulierbarkeit eines bestimmten Petri-Netzes reduzieren (z.B. Abb. 5). Dadurch könnten die sicherlich aufwendigen Beweise (diese Erfahrung werden wir noch reichlich machen dürfen) überflüssig werden. Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden wir versuchen, diesen Weg zu gehen. Nur dort, wo die Semilinearitätsgrenzen Petri-Netze mit genau einer inhibitor-Kante mittelbar oder unmittelbar betreffen, soll die exakte Beweisführung nicht ausbleiben.

Bevor wir mit einer weiteren, für unsere Betrachtungen relevanten Semilinearitätsgrenze fortfahren, studieren wir noch eine andere mögliche Simulation des Petri-Netzes aus Abb. 5, und zwar in einem Vektor-Additionssystem mit zwei zusätzlichen Stellen und zwei inhibitor-Kanten (letztere sind dafür unbedingt erforderlich). Die Abb. 10 schildert die Zustandsveränderungen, die einmal mehr auf die inzwischen hinlänglich bekannte Schaltfolge  $t_1 t_2 t_3 t_4 (t_1)^2 t_2 t_3$  zurückgehen. Die Abb. 11 enthält eine Zusammenstellung von bislang kennengelernten Simulationsmöglichkeiten, bezogen jeweils auf entsprechende Varianten des Grundmodells.<sup>6</sup> Der interessante Punkt an den Beispielen Abb. 9 und Abb. 10 ist der, daß zwei inhibitor-Kanten, eingesetzt als Simulationsmittel oder als Kompaktierungsmittel des zu simulierenden Petri-Netzes, gleiches bewirken, nämlich die Verschiebung der dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenze gegenüber dem Grundmodell.

<sup>5</sup> Gemeint ist vor allem die Kompaktierung von WPNC's und Zählerautomaten, die im nächsten Kapitel ausführlich diskutiert werden.

<sup>6</sup> Mit der Simulation der kontrollierenden Zustände auf der Basis des Grundmodells meinen wir ein gewöhnliches Vektor-Additionssystem mit 6 Stellen (davon 3 Simulationsstellen), das laut Lemma 3.3 existiert. Siehe auch Anhang A.

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN



85. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

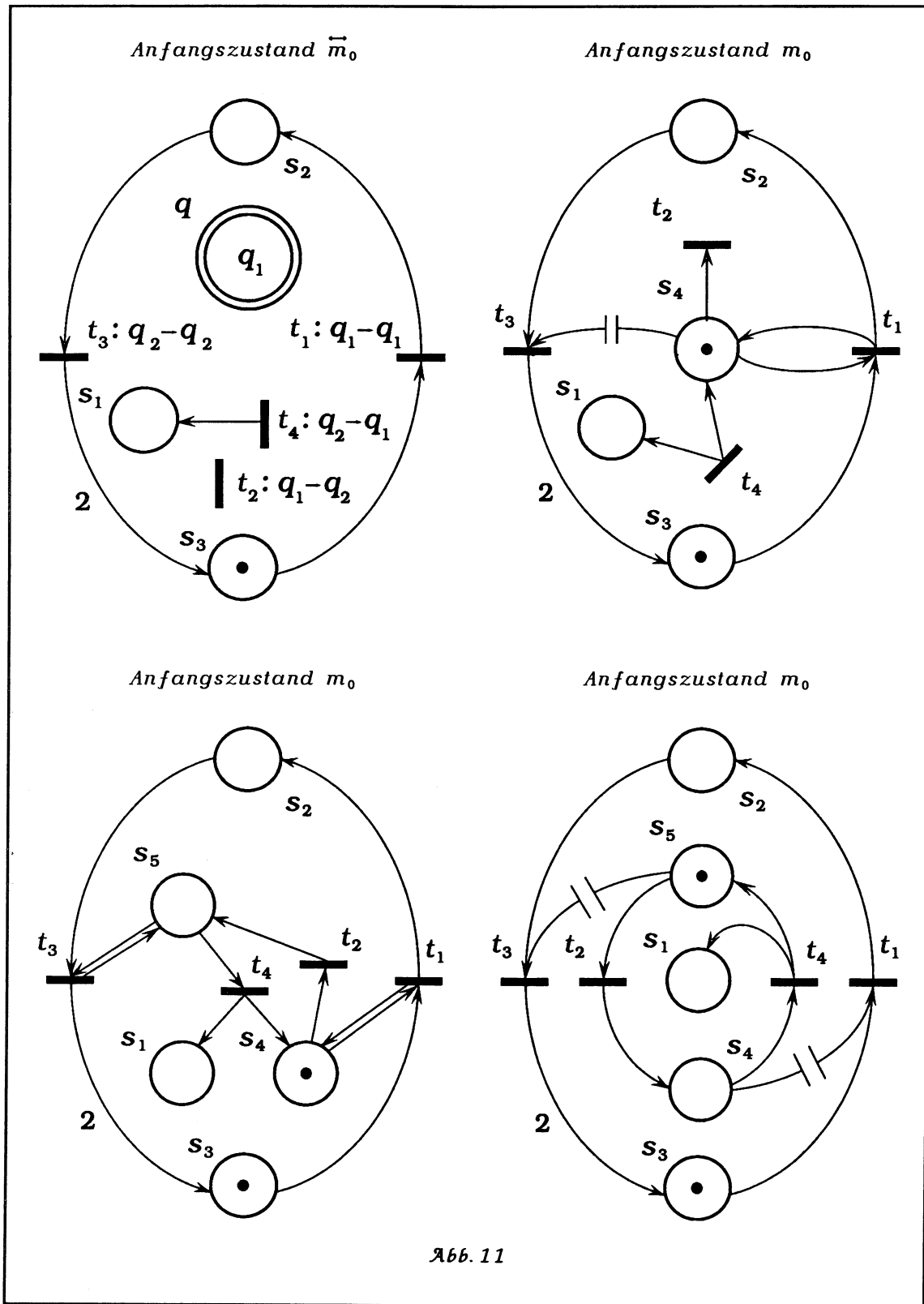


Abb. 11

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

Die Beispiele Abb. 9, Abb. 10 (zusammen mit Lemma 5.2) belegen zwar die Verschiebung der Semilinearitätsgrenze durch inhibitor-Kanten. Auf der anderen Seite wollen wir nicht vergessen, daß zwei solche Kanten ein sehr starkes Mittel sind (wegen der noch zu präzisierenden Simulierbarkeit von Turing-Maschinen - §6). Außerdem sind zwei kontrollierende Stellen in dieser Hinsicht gleichwertig (Abb. 2). Unsere Fragestellung geht daher in die Richtung, ob bereits eine einzelne inhibitor-Kante eine solche Verschiebung verursachen kann. Um diese Frage zu beantworten, untersuchen wir die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme (ohne kontrollierende Zustände).

Auf der Suche nach einer geeigneten Beweisstrategie überlegen wir zunächst, welchen Wert die bislang erzielten Resultate im Hinblick auf die zu beweisende Aussage darstellen. Erinnern wir uns z.B. an das Korollar 3.7, das uns die Möglichkeit liefert, Stellen mit beschränkten Projektionen der Erreichbarkeitsmengen mit Hilfe von kontrollierenden Zuständen zu simulieren. Vierdimensionale Vektor-Ersetzungssysteme mit (mindestens) zwei solchen Stellen sind demnach durch (höchstens) zweidimensionale Petri-Netze (wegen Lemma 3.1 sogar Vektor-Additionssysteme) mit kontrollierenden Zuständen simulierbar, und daraus folgt sofort die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen (Theorem 5.4 oder bereits das Lemma 5.1). Welche Aussage läßt sich aber aus dieser Überlegung ableiten, wenn drei oder gar alle vier Stellen unbeschränkte Projektionen der Erreichbarkeitsmengen haben? Eine willkürliche Einschränkung der Aufnahmekapazitäten zweier Stellen<sup>7</sup> ermöglicht zwar wieder den gleichen Ansatz - nicht aber den Schluß auf die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen. Auch nicht in dem zwangsläufig spezifizierten Teilgitter von  $\mathbb{N}^4$  (rein mengentheoretisch zu verstehen), weil wir ja nur Schaltpfade zulassen, die in diesem Teilgitter verbleiben. Sollte aber eine ähnliche Aussage auch in den anderen Regionen<sup>8</sup> möglich sein, dann läge es nahe, hier eine Art „divide & conquer“ zu verfolgen. In der zweiten Phase („conquer“) müßten dann auch solche Schaltpfade berücksichtigt werden, die all diese Regionen „durchwandern“, was umso einfacher sein dürfte, je höher die Qualität der Teillösungen in den einzelnen Regionen sein wird. Und diese Teillösungen werden uns wohl kaum mehr liefern als die Semilinearität und vielleicht Berechenbarkeit der Erreichbarkeitsmengen - wahrscheinlich eben nur auf einigen Schaltpfaden und in gewissen Teilgittern. Formal wollen wir solche Aussagen folgendermaßen notieren:

$$\mathfrak{R}_P^{[G]}(\cdot) \cap N; N \subseteq G \subseteq \mathbb{N}^4 \quad (\text{darunter verstehen wir die Erreichbarkeitsmenge des Petri-Netzes } \mathcal{P} \text{ im Teilgitter } N \text{ auf Schaltpfaden aus } G).$$

<sup>7</sup> Petri-Netze mit eingeschränkten Aufnahmekapazitäten der Stellen sind eine weitere Grundmodell-Variante, die wir hier allerdings nicht zu diskutieren brauchen. Diese Eigenschaft kann problemlos mit Hilfe von entsprechend angebundenen komplementären Stellen herbeigeführt werden (vgl. Diskussion des Beispiels Abb. 2, §2), die ebenfalls durch kontrollierende Zustände simulierbar sind.

<sup>8</sup> Teilgitter, deren Vereinigung das gesamte  $\mathbb{N}^4$  ergibt, wollen wir als Regionen bezeichnen. Implizit mitgemeint ist also stets eine entsprechende Aufteilung des  $\mathbb{N}^4$ , allerdings nicht unbedingt disjunkt.

Bis zum Ende dieses Kapitels verstehen wir unter  $\mathcal{V}$  ein vierdimensionales und gewöhnliches Vektor-Ersetzungssystem. Die erste Teillösung haben wir bereits gewinnen können:

**Lemma 5.9.** Für alle  $\mathcal{V}$ , alle Komponentenpaare  $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$  mit  $j \neq k$  und alle  $h_j, h_k \in \mathbb{N}$  sind die Erreichbarkeitsmengen in den jeweiligen Regionen  $H^{j,k} = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x_j \leq h_j \wedge x_k \leq h_k\}$  auf Schaltpfaden aus diesen Regionen, für alle Anfangsmengen  $M_0 \in \text{sem}(H^{j,k})$  stets semilinear und effektiv berechenbar. Es gilt also für alle  $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $j \neq k$  und  $h_j, h_k \in \mathbb{N}$ :

$$\forall M_0 \in \text{sem}(H^{j,k}): \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}^{[H^{j,k}]}(M_0) \in \text{sem}(H^{j,k}).$$

**Beweis:** Da die Stellen  $s_j$  und  $s_k$  nicht größer werden können<sup>9</sup> als entsprechend  $h_j$  und  $h_k$ , können sie laut Korollar 3.7 durch kontrollierende Zustände „wegsimuliert“ werden. Unsere Behauptung folgt dann aus dem Lemma 5.1.  $\square$

Wichtig an dieser Aussage ist der allgemeine Quantor, der dahinter steckt. Die Wahl der Konstanten  $h_j$  und  $h_k$  ist nämlich völlig beliebig. Das im nachstehenden Lemma festgehaltene Resultat gilt dagegen nur bei geeigneter Wahl der entsprechenden Konstanten.

**Lemma 5.10.** Für alle (gewöhnliche) Vektor-Ersetzungssysteme  $\mathcal{V}^n$  und alle Komponenten  $i \in \{1, \dots, n\}$  gibt es eine effektiv berechenbare<sup>10</sup> Konstante  $h^i = \{h_1^i, \dots, h_n^i\}$  mit  $h_i^i = 0$ , sodaß gilt: Es gibt effektiv berechenbare und semilineare Mengen, die die Erreichbarkeitsmengen des  $\mathcal{V}^n$  in den jeweiligen Regionen  $H^i = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x \geq h^i\}$  auf Schaltpfaden aus diesen Regionen gänzlich enthalten, die ihrerseits aber Teilmengen der Erreichbarkeitsmengen von  $\mathcal{V}^n$  sind. Formal heißt das für die jeweiligen Regionen:

$$\exists L^i \in \text{sem}(H^i): \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^i]}(M_0) \subseteq L^i \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(M_0) \text{ für alle } M_0 \in \text{sem}(H^i).$$

**Bemerkung:** Zwar ist diese Aussage sogar dimensionsunabhängig - in anderer Hinsicht ist sie jedoch deutlich schwächer, als das Lemma 5.9. Das hängt zum einen mit dem spezifischen Quantor zusammen ( $\exists h^i$ ), zum anderen erhalten wir nicht die Erreichbarkeitsmenge selbst, sondern deren semilineare Obermenge. Wichtig ist aber, daß diese „Einhüllende“ in der gesamten Erreichbarkeitsmenge des  $\mathcal{V}^n$  enthalten ist, was unser Beweis ebenfalls belegt.

<sup>9</sup> Damit meinen wir selbstverständlich die Projektionen der Erreichbarkeitsmengen auf die jeweiligen Stellen, die in diesem Falle beschränkt sind.

<sup>10</sup> Die Berechenbarkeit der relevanten Konstanten und Erreichbarkeitsmengen bis hin zu der gesuchten Erreichbarkeitsmenge von  $\mathcal{V}$  soll vollständig halber festgehalten werden. In der Tat markiert unser Beweis einen (wenn auch nicht sehr zu empfehlenden) Algorithmus zur Berechnung dieser Menge, obwohl die Berechenbarkeit aus der Semilinearität sofort folgt.

## 55. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

**Beweis:** Zunächst beobachten wir, daß die Testvektoren in Vektor-Ersetzungssystemen nur hinreichend nahe an den entsprechenden Gitterachsen von Bedeutung sind. Für die äquivalenten Petri-Netze heißt es, daß die kontrollierenden Stellen u.U. keine Transitionen effektiv kontrollieren. Sei  $g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{N}^n$  mit  $g_j = \max\{\xi(s_j, t) \mid t \in T: \xi(t, s_j) > 0\}$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Im Teilgitter  $G = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x \geq g\}$  verhält sich jedes Vektor-Ersetzungssystem  $\mathcal{V}^n$  wie ein Vektor-Additionssystem  $\mathcal{U}^n$ , d.h. wir können für alle Transitionen  $t \in T$  die folgende Modifikation hinsichtlich aller Stellen  $s_j \in S$  vornehmen, ohne das Verhalten und insbesondere die Erreichbarkeitsmengen von  $\mathcal{V}^n$  (in dem oben spezifizierten Teilgitter) zu verändern:

$$\begin{aligned} \xi'(s_j, t) &= 0 \wedge \xi'(t, s_j) = \xi(t, s_j) - \xi(s_j, t) \text{ falls } \xi(t, s_j) \geq \xi(s_j, t), \\ \xi'(t, s_j) &= 0 \wedge \xi'(s_j, t) = \xi(s_j, t) - \xi(t, s_j) \text{ falls } \xi(t, s_j) \leq \xi(s_j, t). \end{aligned}$$

Das so konstruierte Petri-Netz genügt offensichtlich ( $PN^*$ ), ist also ein (gewöhnliches) Vektor-Additionssystem. Deshalb können wir sicherlich die folgende Aussage machen:

**Lemma 5.10.1.** Für jedes gewöhnliche Vektor-Ersetzungssystem  $\mathcal{V}^n$  existiert ein Vektor-Additionssystem  $\mathcal{U}^n$  (ebenfalls ohne inhibitor-Kanten) und eine effektiv berechenbare Konstante  $g = \{g_1, \dots, g_n\}$ , sodaß im Teilgitter  $G = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x \geq g\}$  die Äquivalenz  $\mathcal{V}^n = \mathcal{U}^n$  besteht. Insbesondere gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}^{[G]}(M_0) \text{ für alle } M_0 \subseteq G. \quad \square$$

In hinreichend kleinen Dimensionen kann aus dieser Äquivalenz die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen in  $G$  gefolgert werden, was für den hier betrachteten vierdimensionalen Raum vorerst vielversprechend erscheinen mag. Dennoch geht diese Qualität der Aussage im Laufe der weiteren Überlegungen verloren. Wir erhalten lediglich - ähnlich, wie im Lemma 4.6 - „legale“ Überdeckungen (Einhüllende) der relevanten Mengen, und deshalb wollen wir von Anfang an mit solchen Strukturen arbeiten. Wir überlegen uns daher die Konsequenzen in beliebig großen Räumen und streben eine dimensionsunabhängige Aussage an.

**Korollar 5.10.2.** Seien  $\mathcal{V}^n$  und  $\mathcal{U}^n$  wie im Lemma 5.10 In Abhängigkeit von  $n$  gilt:

$$\text{für } n \leq 5: \forall M_0 \in \text{sem}(G): \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0) \in \text{sem}(G),$$

$$\text{für } n > 5: \exists G' \subseteq G \forall M_0 \in \text{sem}(G') \exists L \in \text{sem}(G'):$$

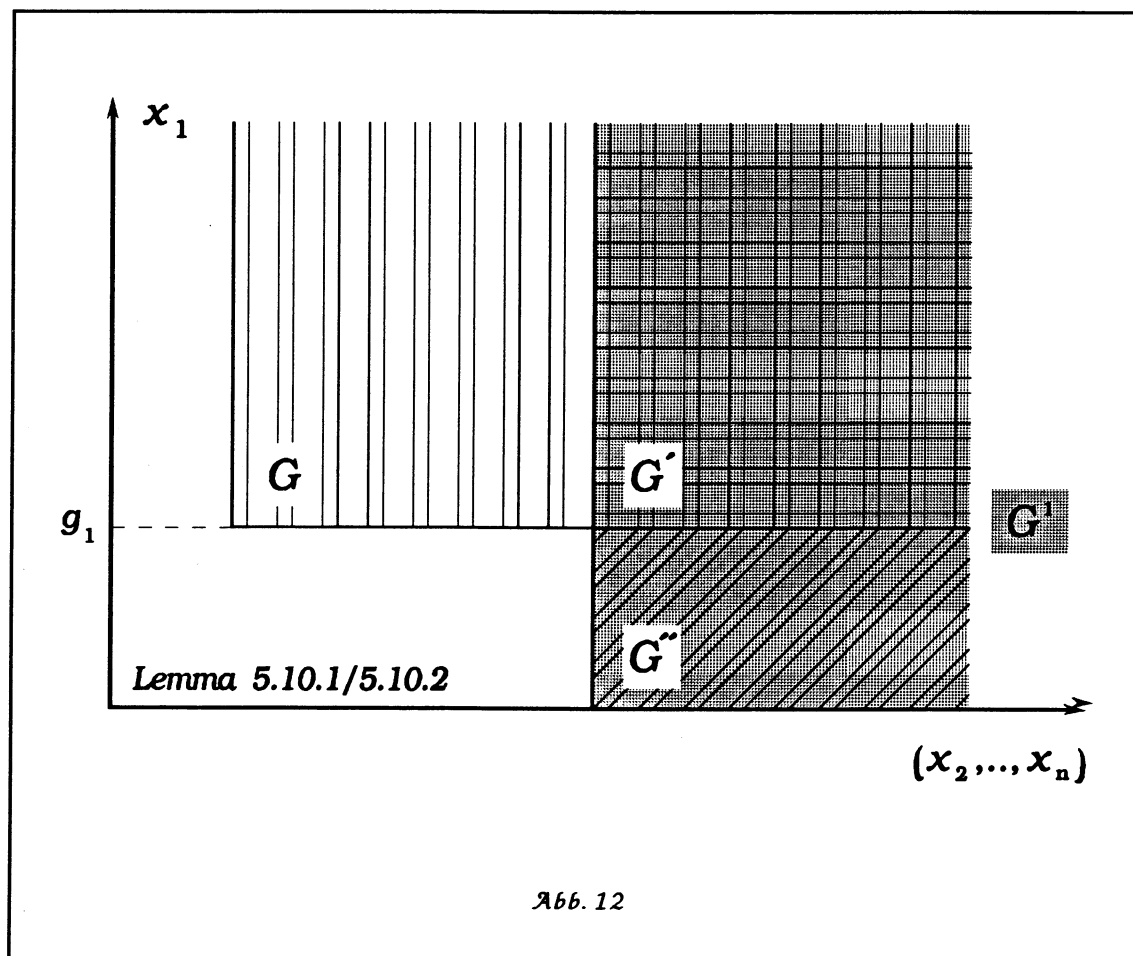
$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0) \subseteq L \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0).$$

**Beweis:** Der Austritt aus  $G$ , bzw.  $G'$  kann z.B. durch zusätzliche Stellen mit entsprechenden Anfangsmarkierungen verhindert werden. Allerdings, um dimensionsbezogene Aussagen machen zu können, benötigen wir eine bessere Lösung. Offensichtlich gilt:

## 85. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}(M_0 - g) + g \text{ falls } M_0 \subseteq G,$$

wobei  $M \pm g$  als Translation zu verstehen ist. Damit bringen wir die gewünschte Simulation ohne zusätzliche Stellen zustande. Die Lemmata 5.10.1 und 5.2 transitiv genommen, liefern dann sofort die Behauptung für  $n \leq 5$ . Für  $n > 5$  erhalten wir allerdings ein deutlich schwächeres Ergebnis. Die Äquivalenz  $\mathcal{V}^n = \mathcal{U}^n$  aus dem Lemma 5.10.1 legt die Einbettung vom Lemma 4.6 in das Teilgitter  $G'$  nahe, woraus ein  $G' \subseteq G$  resultiert, in dem die Erreichbarkeitsmenge des  $\mathcal{V}^n$  semilinear eingehüllt werden kann (diese Einhüllende enthält ausschließlich Punkte, die auf Schaltpfaden aus  $G$  erreichbar sind, d.h. nur Punkte aus der Erreichbarkeitsmenge von  $\mathcal{V}^n$ ). Sei also  $G' = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x \geq g'\}$  für ein  $g' \geq g$  im Sinne dieser Einbettung.<sup>11</sup> Zusammenfassend erhalten wir:



<sup>11</sup> Laut Lemma 4.6 müssen lediglich beliebige  $n-2$  Komponenten von  $g'$  hinreichend groß sein gegenüber  $g$ . Interessanterweise gibt es sogar eine lineare Einhüllende der betrachteten Erreichbarkeitsmenge - vorausgesetzt, daß beliebige  $n-1$  Komponenten von  $g$  entsprechend modifiziert werden. Siehe dazu [10].

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

$\exists G' \subseteq G \vee M_0 \in \text{sem}(G') \exists L \in \text{sem}(G')$ :

$$\mathfrak{K}_{\mathcal{V}^n}^{[G']}(M_0) \stackrel{5.10.1}{=} \mathfrak{K}_{\mathcal{U}^n}^{[G']}(M_0) \stackrel{4.6}{\subseteq} L \stackrel{4.6}{\subseteq} \mathfrak{K}_{\mathcal{U}^n}^{[G]}(M_0) \stackrel{5.10.1}{=} \mathfrak{K}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0). \quad \square$$

Es ist wohl kaum zu erwarten, daß dieses Resultat bereits ausreicht, um zusammen mit dem Lemma 5.9 den Schluß auf die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze gewöhnlicher Vektor-Ersetzungssysteme zu ermöglichen. Wir beobachten, daß - unabhängig von der Wahl der Konstanten  $h_j$  und  $h_k$  aus dem Lemma 5.9 - auch für  $n = 4$  stets

$$G' \cup \left( \bigcup_{\substack{j, k \in \{1, 2, 3, 4\} \\ j \neq k}} H^{j, k} \right) \neq \mathbb{N}^4$$

gilt, weil ja Punkte mit nur einer hinreichend kleinen Komponente von dieser Vereinigung nicht erfaßt werden. Aus diesem Grund betrachten wir etwas „größere“ Teilgitter, nämlich:

$$G^i = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x_j \geq g_j, j \neq i\} \supseteq G' \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

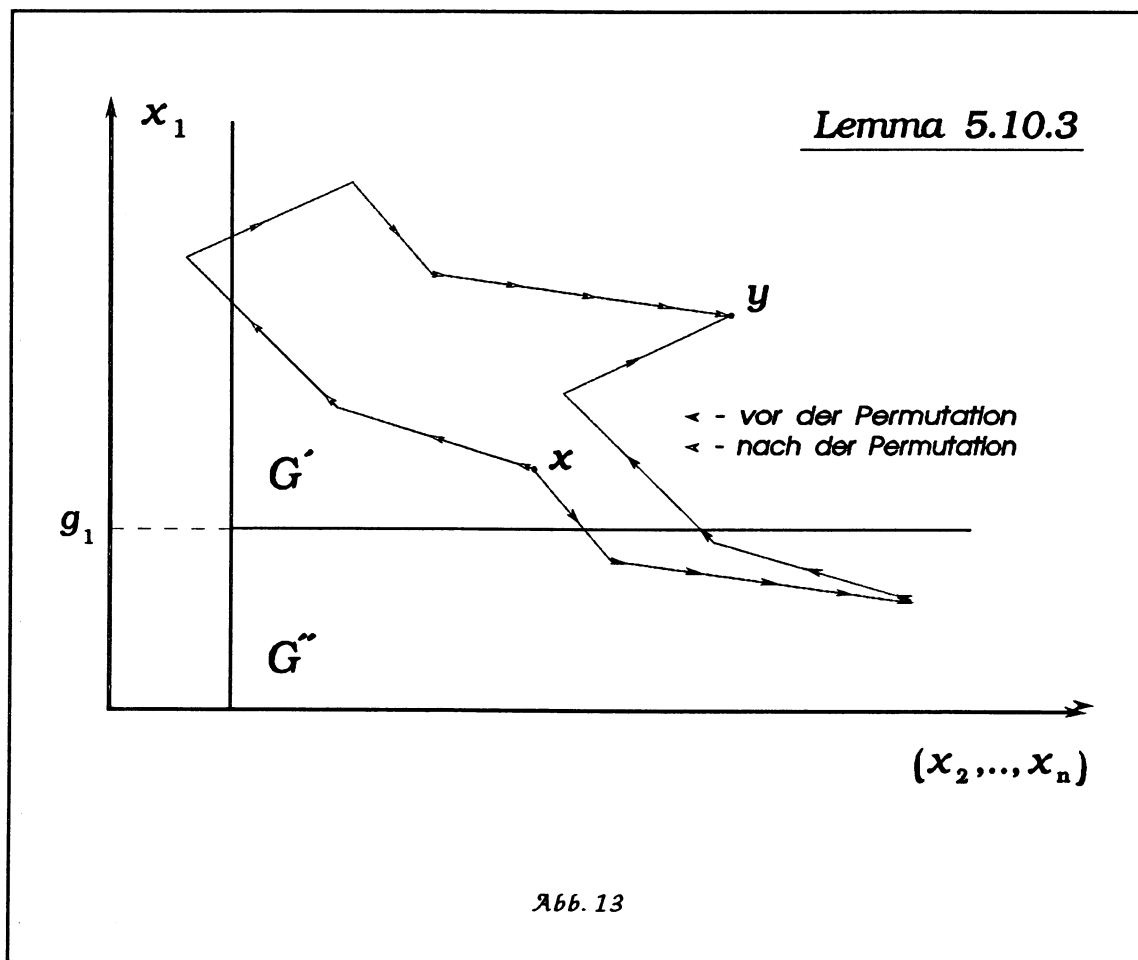
(Diese „Säulen“ können jeweils als disjunkte Vereinigungen  $G' \cup G'' = G^i$  angesehen werden, mit  $G'' = G^i \setminus G'$ ). Seien  $x, y \in G'$ . Wir analysieren Schaltpfade zwischen den beiden Punkten aus den Regionen  $G^i$  für ein gegebenes  $i$ . Nehmen wir an, daß die Stelle  $s_i$  keine Transition kontrolliert. Damit könnten wir das vorherige Korollar für dieses  $G^i$  formulieren, was der zu beweisenden Aussage aus dem Lemma 5.10 (aber nur für dieses  $G^i$ ) gleichkäme. Es wäre ja nur  $H^i = G^i$  zu setzen. Ansonsten würden Schaltpfade zwischen  $x$  und  $y$  i.a. gegen die Schaltregel für  $\mathcal{V}^n$  verstoßen, sollten sie das Teilgitter  $G''$  „betreten“, d.h. Punkte von dort beinhalten. Solche Schaltpfade wären aber mit Sicherheit zulässig (oder genauer: die Schaltfolgen, auf die sie zurückgehen) hinsichtlich aller Stellen  $s \neq s_i$ . Die Legalität dieser Schaltpfade hinsichtlich  $s_i$  versuchen wir durch geeignete Permutation der entsprechenden Schaltfolgen herzustellen. Offensichtlich erreichen wir stets die gleichen Endpunkte auf permutierten Schaltpfaden - von deren Zulässigkeit einmal abgesehen. Bis zum Ende dieses Beweises sei  $\nu$  eine für  $\mathcal{U}^n$  zulässige Schaltfolge mit  $x \rightarrow^\nu y$ .

**Lemma 5.10.3.** Jede Schaltfolge  $\nu$  kann unabhängig von  $x$  und  $y$  so permutiert werden, daß sie hinsichtlich  $s_i$  zulässig wird.

**Beweis:** Die Schaltfolge  $\nu$  zerlegen wir in zwei Teile:  $\nu^+$ , bestehend ausschließlich aus Transitionen mit  $\xi(t, s_i) \geq \xi(s_i, t)$  und  $\nu^-$  mit allen anderen Transitionen. Wir lassen zuerst alle Transitionen aus  $\nu^+$  feuern. □

Durch diese simple Permutation haben wir den Eintritt in das Teilgitter  $G''$  zwar verhindert - den Austritt aus  $G^i$  aber in Kauf nehmen müssen. Die Zulässigkeit der hier betrachteten Schaltfolgen bezüglich  $s_i$  tangiert diese u.U. bezüglich aller anderen Stellen, was nicht gerade auf ein sehr wertvolles Resultat hinzudeuten scheint. Nichtsdestotrotz ist

es unschwer zu erkennen, daß man in einigen Fällen Erfolg haben wird mit dieser Permutation. Sicherlich wird es von dem Petri-Netz selbst und der betrachteten Schaltfolge abhängen - aber auch davon, wie weit die Punkte  $x$  und  $y$  von  $g$  entfernt sind. Weiter wird man diese Permutation wohl dahingehend variieren können, daß der Austritt aus  $G^i$  entweder verhindert oder zumindest begrenzt wird, im Sinne der Entfernung von  $G^i$ . Entscheidend in diesem Zusammenhang ist die Frage, ob für jedes Petri-Netz eine solche Konstruktion möglich sein wird. Mit anderen Worten: gibt es eine Konstante  $h^i = \{h_1^i, \dots, h_n^i\}$  mit  $h_j^i \geq g_j^i$  für  $j \neq i$ , sodaß jeder  $\vee$ -Schaltpfad zwischen  $x$  und  $y$  aus  $H^i = \{z \in G^i \mid z \geq h^i\}$  auf zulässige Form permutiert werden kann? Dieser Schaltpfad dürfte dann  $H^i$  zwar verlassen - nicht aber  $G^i$ . Diese Frage wollen wir in den nachfolgenden Überlegungen klären.



Zur Erinnerung:  $G^i$  ist die Menge von Punkten, die hinreichend weit entfernt sind von allen Gitterachsen (im Sinne des Korollars 5.10.2).



bezeichnen wir als dessen Entfernung von  $G^i$ . Das Problem besteht darin, diese Entfernung für alle  $v$  und unabhängig von  $x$  und  $y$  einzuschränken. Dann brauchen wir nur noch  $G^i$  um  $\delta_v$  weiter weg von den Gitterachsen zu wählen, um die Zulässigkeit der hier relevanten Schaltfolgen zu erreichen.

Dazu betrachten wir den Grenzfall  $x = y = g$  (die Verallgemeinerung auf  $x, y$  mit  $x \geq g, y \geq g$  ist dann trivial). Sollte für alle Transitionen, die  $v^+$  zuzuordnen sind (d.h. nicht nur diejenigen, die in der betrachteten Schaltfolge vorkommen),  $\xi(t, s_j) \geq \xi(s_j, t)$  für alle  $s_j \in S$  gelten, dann könnten wir  $v^+ v^-$  feuern lassen, was auf  $\delta_v = 0$  für solche Petri-Netze hinauslaufen würde. Von diesem Spezialfall abgesehen, kommen wir jedoch nicht umhin,  $\bar{G}^i = \{z \in \mathbb{N}^n \mid z \notin G^i\}$  zu betreten. Betrachten wir eine Transition  $t^+$ , die in  $v^+$  vorkommt. Da ein Schaltpfad mit der hier vorausgesetzten Eigenschaft (d.h. mit Wiedereintritt ins  $H'$ ) möglich ist, muß es eine Transition oder eine Schaltfolge  $\tau^-$  mit Transitionen aus  $\tau^-$  in  $v^-$  geben, sodaß der Schaltpfad  $t^+ \tau^-$  einen Endpunkt aus  $G^i$  trifft. Und weil es nur endlich viele Transitionen gibt, gibt es auch nur endlich viele  $\tau^-$ , die dieses bewirken. Leider kann dieser Schaltpfad in die Region  $G''$  eindringen, was wir unbedingt vermeiden wollten. Wenn aber zuerst noch weitere Transitionen aus  $v^+$  feuern und anschließend die dazugehörigen Schaltfolgen  $\tau^-$ , dann liegt der Endpunkt u.U. in  $G^i$ . Damit der hier betrachtete  $v$ -Pfad möglich sein kann, kann es nur endlich lange und folglich endlich viele Schaltfolgen mit Transitionen aus  $v^+$  geben, die unbedingt feuern müssen, damit die dazugehörigen  $\tau^-$  den Schaltpfad wieder ins  $G^i$  führen können. Daraus können wir aber  $\delta_v$  sicherlich berechnen, weil es nur endlich viele Kantenvielfachheiten gibt.  $\square$

Obige Überlegung hat den Beweis dafür erbracht, daß die Entfernung von  $H^i$  bei der angestrebten Permutation beschränkt ist, d.h. es gibt ein  $\delta \in \mathbb{N}$  mit  $\delta = \delta_v^{\max}$ , das den gesetzten Anforderungen genügt. Sei  $h^i = \{h_1^i, \dots, h_n^i\}$  mit  $h_j^i = g_j + \delta, j \neq i$ . Die etwas schmaler gewordene Säule  $H^i$  betrachten wir hier analog zu  $G^i$  als disjunkte Vereinigung  $H' \cup H''$ . Das vorherige Lemma belegt:

$$\forall M_0 \in \text{sem}(H') \exists L \in \text{sem}(H''):$$

$$\left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^i]}(M_0) \cap H' \right) \stackrel{5.10.4}{\subseteq} L \stackrel{5.10.4}{\subseteq} \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G^i]}(M_0) \cap H' \right) \stackrel{5.10.2}{\subseteq} (\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(M_0) \cap H') \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(M_0).$$

Wir müssen nur noch klären, ob die Erreichbarkeitsmenge in  $H'' = H^i \setminus H'$  ebenfalls, wenn nicht direkt berechnet, dann wenigstens „legal“, d.h. durch eine semilineare Teilmenge der gesamten Erreichbarkeitsmenge eingehüllt werden kann. Nehmen wir an, daß die Stelle  $s_i \in S$  nur eine Transition  $t^+ \in T$  kontrolliert. Wir betrachten das Petri-Netz  $\mathcal{V}^n$  ohne diese Transition ( $\mathcal{V}^n \setminus \{t^+\}$ ), in dem trivialerweise keine Transition innerhalb von  $H^i$  kontrolliert wird. Wegen der offensichtlichen Inklusion

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n \setminus \{t^+\}}(\cdot) \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(\cdot)$$

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

sowie der Äquivalenz  $\mathcal{V}^n = \mathcal{U}^n$  in  $H^1$  können wir sicherlich schreiben:

$$\left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^1]}(M_0) \cap H'' \right) = \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^1]} \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^1]}(M_0) \cap H' \right) \cap H'' \right) = \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}^{[H^1]} \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^1]}(M_0) \cap H' \right) \cap H'' \right)$$

für alle  $M_0 \subseteq H'$ . Da wir aber weder  $\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^1]}(\cdot) \cap H'$  noch  $\mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}^{[H^1]}(\cdot)$  direkt berechnen können, dürfen wir lediglich folgern:

$$\forall M_0 \in \text{sem}(H') \quad \exists L \in \text{sem}(H^1):$$

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^1]}(M_0) \subseteq L \subseteq \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G^1]}(M_0) \cap H^1 \right) \stackrel{5.10.2}{\subseteq} \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(M_0) \cap H^1 \right) \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(M_0).$$

Sicherlich ist die Fixierung der Anfangsmenge als Teilmenge von  $H'$  keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit. Denn, falls die Anfangsmenge gänzlich in  $H''$  liegt, brauchen wir nur die (semilineare) Einhüllende von

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}^{[H^1]}(M_0) \cap H'$$

für  $M_0$  einzusetzen. Und sollte  $M_0$  die beiden Regionen überlappen, dann behandeln wir  $M_0 \cap H'$  und  $M_0 \cap H''$  dementsprechend. Damit erhalten wir die Erreichbarkeitsmenge des  $\mathcal{V}^n$  in  $H^1$  (im mehrfach genannten Sinne), allerdings vorerst nur unter der Voraussetzung, daß die Stelle  $s_j$  nur eine Transition kontrolliert. Nehmen wir aber an, daß wir das gleiche Resultat errechnen können, wenn diese Stelle  $n$  Transitionen kontrolliert. Die Erreichbarkeitsmenge in  $H'$  kennen ohnehin und die in  $H''$  könnten wir – laut Voraussetzung – unter Ausschluß einer weiteren, durch  $s_j$  kontrollierten Transition  $t_{n+1}$ , berechnen. Von Belang wäre nur noch, wo die Anfangsmenge liegt, was wir aber zuletzt durch Fallunterscheidung gemeistert haben.

Die Behauptung aus dem Lemma 5.10 folgt daher induktiv nach der Anzahl der durch  $s_j$  kontrollierten Transitionen, wobei wir Vollständigkeitshalber festhalten wollen, daß unsere Überlegung einen rekursiven Algorithmus zur Berechnung von  $L$  markiert.  $\square$

Damit haben wir das um eine Komponente abgeschwächte Pendant zum Lemma 4.6 für gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme bewiesen. Die Frage, ob unsere Beweisführung auf zwei Stellen (wie im Lemma 4.6) verallgemeinert werden kann, ist jedoch zu verneinen. Nehmen wir z.B. das Petri-Netz aus Abb. 2 und das Komponentenpaar (4,5), so stellen wir fest, daß die Stellen  $s_4$  und  $s_5$  einerseits bestimmte Transitionen kontrollieren und andererseits komplementär geschaltet sind. Eine solche Situation kann bei gewöhnlichen Vektor-Additionssystemen nicht eintreten, was die Aussage aus Lemma 4.6 verständlich erscheinen läßt. In unserem Fall können wir keine vergleichbaren Resultate gewinnen – etwa in

$\{x \in \mathbb{N}^5 \mid x \geq \alpha\}$  für ein  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  mit  $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$ . Gerade daraus resultiert die Verschiebung der Semilinearitätsgrenze. Aus Lemma 4.6 und 5.9 (für Vektor-Additionssysteme) wurde in [10] die Semilinearitätsgrenze  $n^* = 5$  hergeleitet. Da das Lemma 5.9 uneingeschränkt gilt (u.U. auch bei mehreren inhibitor-Kanten, wie das Theorem 5.5 lehrt), kann nur eine abgeschwächte Form von 4.6 gelten.

Diese Vorgehensweise ist im Hinblick auf die hier nicht geklärten Semilinearitätsgrenzen sehr zu empfehlen. Nehmen wir z.B. Vektor-Additionssysteme mit genau einer inhibitor-Kante und ohne kontrollierende Zustände. Das Lemma 5.9 gilt wegen Theorem 5.4. Zu zeigen bleibt nur noch Lemma 4.6 für diese Variante (ein guter Einstieg ist der Satz über schwach-monotone inhibitor-Transitionen, §7). Das Zusammenfügen beider Resultate kann wie in [10] verlaufen. Anders sieht es aus, wenn eine weitere inhibitor-Kante hinzukommt. Beide Teillösungen verlieren dann ihre Gültigkeit. Auf diese Fragen kommen wir noch zurück (§6).

Im weiteren Verlauf unserer Überlegungen bedienen wir uns der in [10] angewandten Beweistechnik - selbstverständlich in etwas abgeänderter Form, weil die Ausgangsbedingungen anders sind.

Das Lemma 5.10 liefert zwar ein interessantes, dimensionsunabhängiges Resultat - ist aber im Hinblick auf die zu beweisende Aussage nur im vierdimensionalen Gitter von Bedeutung. Deshalb gehen wir von der (etwas bedingten) Semilinearität und Berechenbarkeit der Petri-Netz-Erreichbarkeitsmengen in folgenden Regionen in  $\mathbb{N}^4$  aus:

$$H^{j,k} \subseteq \mathbb{N}^4 \text{ für alle } j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, j \neq k \text{ (Lemma 5.9),}$$

$$H^i \subseteq \mathbb{N}^4 \text{ für alle } i \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ (Lemma 5.10).}$$

Im zweiten Teil des „divide & conquer“-Verfahrens kombinieren wir diese Teillösungen zu einer globalen Lösung, nämlich im gesamten  $\mathbb{N}^4$ . Seien:

$$H^{(*)} = \bigcup_{1 \leq j \leq 4} H^j \text{ und } H^{(**)} = \bigcup_{\substack{1 \leq j, k \leq 4 \\ j \neq k}} H^{j,k}.$$

Das Lemma 5.9 gilt für alle  $h_j, h_k \in \mathbb{N}$  und deshalb können wir durch geeignete Wahl dieser Konstanten dafür sorgen, daß die (nichtdisjunkte) Vereinigung von  $H^{(*)}$  und  $H^{(**)}$  bereits  $\mathbb{N}^4$  ergibt. Betrachten wir weiter den Durchschnitt  $H^{j,k} \cap H^{k,l}$  für  $j \neq k \neq l \neq j$ . Dieses Gitter besteht offensichtlich aus endlich vielen eindimensionalen Gittern  $\bar{h}_v$ , die parallel zueinander und zu einer Gitterachse liegen. Gleiches gilt sicherlich für:

$$D = \bigcup_{\substack{1 \leq j, k, l \leq 4 \\ j \neq k \neq l \neq j}} (H^{j,k} \cap H^{k,l}).$$

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

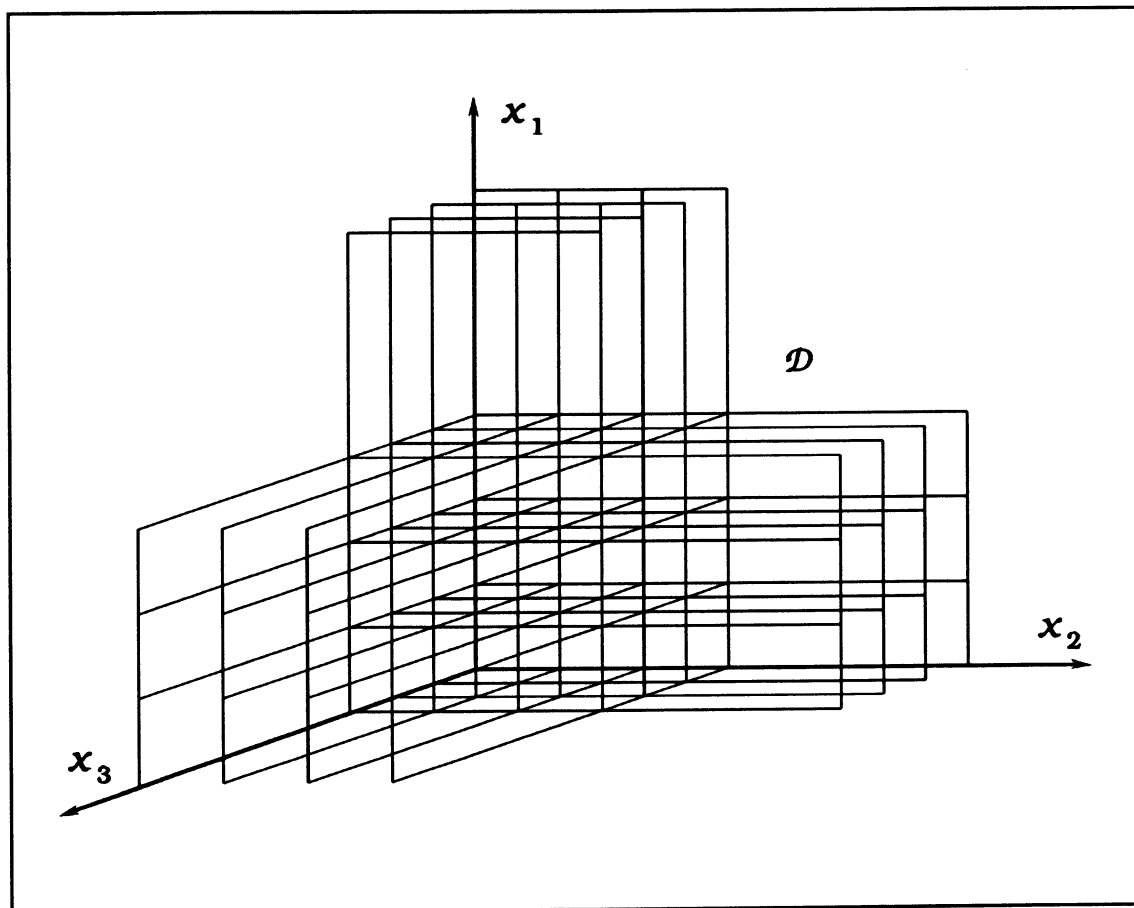
Es ist klar, daß dieser Sachverhalt von essentieller Bedeutung für uns ist (denken wir doch an das Lemma 4.1). Nicht ganz unproblematisch ist jedoch die Frage, wann ein Schaltpfad eine „Linie“  $\tilde{h}_\nu \in D$  durchkreuzt. Deshalb brauchen wir eine etwas andere Menge, nämlich:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{N}^4 \mid x \rightarrow^t y, t \in T, x \in H^{l,l}, y \in H^{k,l}, H^{l,l} \neq H^{k,l}\},$$

für die sicherlich ebenfalls gilt:

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \tilde{h}_i \text{ für ein } m \in \mathbb{N}. \text{ (Es ist } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D} \text{).}$$

**Bemerkung:** Die nachfolgende Abbildung zeigt diese "Linien" im dreidimensionalen Raum, wobei klar ist, daß in diesem Raum die Semilinearität sofort folgt, falls sie hinreichend weit von allen Achsen gegeben ist. Zum Schluß dieses Kapitels kommen wir noch darauf zurück (Lemma 5.15) und attestieren eine weitere, dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze.



## ALGORITHMUS A3

```

input ( $M_0, \mathcal{V}, \{H^{j,k}, H^j \mid 1 \leq j, k \leq 4\}$ );      /*  $M_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^4)$ ,  $\mathcal{V}$ -ein gewöhnliches
Vektor-Ersetzungssystem der Dimension
 $n = 4$ , sowie die zuvor fixierte Aufteilung
von  $\mathbb{N}^4$ . */

begin      /* Die Grundstruktur ist ein direkter, azyklischer Graph (Baum).
Jeder Knoten beinhaltet eine Menge  $\text{set}(\cdot) \subseteq \mathbb{N}^4$  und eine Mar-
kierung  $\text{tag}(\cdot) \in \{\text{open}, \text{closed}\}$ , sowie Verweise auf den Vor-
gänger und den (die) Nachfolger. */

1) let  $\text{set}(\text{root}) = M_0$ ;  $\text{tag}(\text{root}) = \text{open}$ ;      /* root hat keine Vorgänger */
2) on pick leaf:  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{open}$ ; if not exists go e;      /* leaf hat keine
Nachfolger */
3) if  $\text{set}(\text{leaf}) \subseteq H^{j,k}$       /*  $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, j \neq k$  */
4)   begin
5)     let  $M = \text{set}(\text{leaf}) \cup \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}^{[H^{j,k}]}(\text{set}(\text{leaf}))$ ;      /* Lemma 5.9 */
6)     let  $M = M \cup \text{shift}(M)$ ;      /*  $\text{shift}(M) = \{x \mid y \rightarrow^t x, y \in M, t \in T\}$  */
7)     for each ( $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) do
8)       create succ;
          let leaf  $\xrightarrow{\text{next}}$  succ,  $\text{set}(\text{succ}) = M \cap H^j$ ,  $\text{tag}(\text{succ}) = \text{open}$ ;
          /* succ wird direkter Nachfolger von leaf */
9)     end;
10)  if  $\text{set}(\text{leaf}) \subseteq H^j$       /*  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  */
11)  begin
12)    if  $\exists \text{ancestor}(\text{leaf}) \subseteq H^j$  let  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{closed}$ ; go on;
        /* gemeint ist ein nicht unbedingt direkter Vorgänger */
13)    let  $M = \text{set}(\text{leaf}) \cup L^j$ ;      /*  $L^j \supseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}^{[H^j]}(\text{set}(\text{leaf}))$ , Lemma 5.10 */
14)    let  $M = M \cup \text{shift}(M)$ ;
15)    for each ( $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, j \neq k$ ) do
16)      create succ;
          let leaf  $\xrightarrow{\text{next}}$  succ,  $\text{set}(\text{succ}) = M \cap H^{j,k}$ ,  $\text{tag}(\text{succ}) = \text{open}$ ;
17)    end;
18)  go on;
19) e output ( $L = \bigcup_{\text{nodes}} \text{set}(\text{leaf})$ );      /*  $L \supseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}^{\circ}(M_0)$  */

end.

```

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

Ein Schaltpfad, der von einem Gitter  $H^{l,j}$  direkt in ein effektiv anderes Gitter  $H^{k,l}$  hineinläuft, enthält offenbar einen Punkt aus  $\mathcal{D}$ . Erfolgt dieser Übertritt nur indirekt, d.h. auf dem Umweg über  $H^{l^*1}$ , dann ist dies nicht mehr zwingend. Über Schaltpfade mit einem Punkt aus  $\mathfrak{h}_\nu \in H^{l,j}$  und mit dem unmittelbar nächsten Punkt aus einer effektiv anderen Region  $H^{k,l}$  sagen wir, daß sie  $\mathfrak{h}_\nu$  (und damit auch  $\mathcal{D}$ ) durchkreuzen. Nennen wir solche Schaltpfade  $\beta$ -Pfade - im Gegensatz zu  $\alpha$ -Pfadern, die  $\mathcal{D}$  überhaupt nicht durchkreuzen. Die zu beweisende Behauptung (Theorem 5.14) folgt induktiv nach  $m$ , der Anzahl der  $\mathfrak{h}_\nu$ , aus denen sich die Menge  $\mathcal{D}$  zusammensetzt. Der Induktionsschluß ist allerdings nur unter der Voraussetzung möglich (dann aber auch trivial), wenn die „einhüllende Semilinearität“ für alle  $\beta$ -Pfade gezeigt werden kann, d.h. Schaltpfade, die u.U. alle Linien aus  $\mathcal{D}$  durchkreuzen. Auch hier gehen wir den induktiven Weg, nämlich nach  $\mu: 0 \leq \mu \leq m$ , der Anzahl der durch  $\beta$ -Pfade durchkreuzten Linien  $\mathfrak{h}_\nu \in \mathcal{D}$ . Insofern sind das zwei ineinander verkeilte Induktionen. Wir beginnen mit  $\mu = 0$ , den  $\alpha$ -Pfadern also. (Die im nachfolgenden Algorithmus errechnete Menge kann natürlich auch Punkte enthalten, die auf  $\beta$ -Pfadern erreichbar sind. Dieser Sachverhalt geht auf das Lemma 5.10 zurück, das Schaltpfade aus dem Teilgitter  $G^l$  und nicht ausschließlich aus  $H^l$  zuläßt.)

**Lemma 5.11.** Der Algorithmus  $\mathfrak{A}3$  berechnet (stets in endlicher Zeit) eine Menge aus  $sem(N^4)$  für alle (gewöhnliche) Vektor-Ersetzungssysteme der Dimension  $n = 4$  und alle Anfangsmengen  $M_0 \in sem(N^4)$ . Diese Menge enthält alle auf  $\alpha$ -Pfadern erreichbaren Punkte aus  $N^4$ , andererseits aber nur Punkte aus der Erreichbarkeitsmenge von  $\mathcal{V}$ .

**Beweis:** Als erstes beobachten wir, daß alle Knoten in dem erzeugten Baum ausschließlich Mengen enthalten, die gänzlich entweder in einem Teilgitter  $H^l$  oder in  $H^{l,k}$  enthalten sind. Wir können wir o.B.d.A. annehmen, daß auch die Anfangsmenge  $M_0$  in einer solchen Region liegt. Da in den Zeilen <sup>8)</sup> und <sup>16)</sup> auch nur Mengen mit dieser Eigenschaft hinzukommen, folgt unsere Behauptung induktiv nach der Länge des (Baum-) Pfades. Die gleiche Induktion zeigt darüberhinaus, daß diese Mengen stets semilinear sind, denn in Zeile <sup>1)</sup> haben wir eine semilineare Anfangsmenge (Induktionsanfang), in Zeilen <sup>5)</sup> und <sup>13)</sup> vereinigen wir eine (laut Induktionsvoraussetzung) semilineare Menge mit stets semilinearen Mengen (entsprechend Lemma 5.9 und 5.10) und darüberhinaus ist die Semilinearität invariant unter den in den Zeilen <sup>6)</sup>, <sup>8)</sup>, <sup>14)</sup>, <sup>16)</sup> vorgenommenen Operationen. Ferner ist der Baum stets endlich, weil auf jedem Pfad ein Blatt mit  $set(leaf) \subseteq H^l$  nicht unendlich oft auftauchen kann (ein solcher Pfad wird in Zeile <sup>12)</sup> „geschlossen“) und Blätter mit  $set(leaf) \subseteq H^{l,k}$  zwischen Blättern vom Typ  $H^l$  liegen müssen. Folglich wird in Zeile <sup>19)</sup> eine endliche Vereinigung von semilinearen Mengen ausgegeben. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß diese Menge alle auf  $\alpha$ -Pfadern erreichbaren Punkte enthält. Dazu betrachten wir einen solchen Schaltpfad mit zwei aufeinanderfolgenden Punkten  $x_j, x_{j+1}$  und  $x_j \in set(leaf)$  für ein Blatt aus dem errechneten Baum. Nehmen wir an, daß für dieses Blatt  $tag(leaf) = closed$  gilt. Dann gilt sicherlich  $set(leaf) \subseteq H^l$  für ein  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  und es gibt einen Vorgänger  $leaf^*$  von  $leaf$  in diesem Baum mit  $set(leaf^*)$  aus der gleichen Region und  $tag(leaf^*) = open$ . Sei  $x_k \in set(leaf^*)$  mit  $x_k \rightarrow^{set^*} x_j$ . Dann gilt aber  $x_j \in set(leaf^*)$  und deshalb nehmen wir einfach an:  $tag(leaf) = open$ . Liegt  $x_{j+1}$  in der gleichen Region, wie  $x_j$ , dann gilt offensichtlich  $x_{j+1} \in set(leaf)$ . Andernfalls gilt entweder

$$x_{j+1} \in (\text{set}(\text{leaf}) \cup \text{shift}(\text{set}(\text{leaf}))) \cap H^l \text{ oder}$$

$$x_{j+1} \in (\text{set}(\text{leaf}) \cup \text{shift}(\text{set}(\text{leaf}))) \cap H^{l+k}.$$

Die Söhne von  $\text{leaf}$  beinhalten aber beide Mengen, was den Induktionsschritt nach der Länge des betrachteten  $\alpha$ -Pfades liefert.  $\square$

Die Induktionsvoraussetzung bezieht sich primär auf Schaltpfade, die höchstens  $\mu < m$  Linien aus  $\mathcal{D}$  durchkreuzen. Der Algorithmus, dessen Existenz vorausgesetzt werden soll, trifft dennoch auch andere Punkte und zwar nach wie vor aus dem Grund, daß wir nicht die Erreichbarkeitsmengen selbst, sondern deren Überdeckungen berechnen können. Deshalb muß unsere Induktionsvoraussetzung lauten:

**Induktionsvoraussetzung: (5.12)** Die Erreichbarkeitsmengen der vierdimensionalen und gewöhnlichen Vektor-Ersetzungssysteme auf Schaltpfaden, die höchstens  $\mu$  Linien ( $\bar{h}$ ) aus  $\mathcal{D}$  durchkreuzen, können immer durch semilineare und effektiv berechenbare Mengen von erreichbaren Punkten eingehüllt werden.  $\square$

**Lemma 5.13.** Unter der Voraussetzung 5.12 gilt: Die Erreichbarkeitsmengen der vierdimensionalen und gewöhnlichen Vektor-Ersetzungssysteme auf Schaltpfaden, die höchstens  $\mu + 1$  Linien aus  $\mathcal{D}$  durchkreuzen, können immer durch semilineare und effektiv berechenbare Mengen eingehüllt werden.

**Beweis:** Daß diese Mengen vorerst nicht direkt berechnet werden, sollte uns nicht weiter stören. Spätestens bei  $\mu = m$  ist dieser Sachverhalt belanglos. Ferner wissen wir, daß der Algorithmus  $\mathfrak{A}3$  keine Punkte treffen kann, die in dem gegebenen Vektor-Ersetzungssystem nicht erreichbar wären (die Operationen  $\mathfrak{R}^{G^{(l)}}$ ,  $\mathfrak{R}^{G^{(l,k)}}$ ,  $\text{shift}$  treffen nur einwandfrei erreichbare Punkte). Auch diese Behauptung wird also aus diesem Induktionsschritt folgen. Die Induktion nach  $m$  ist dann trivial und zusammen mit dem Spezialfall  $\mu = m$  erhalten wir die im Theorem 5.14 aufgestellte Behauptung. Seien  $\mathcal{D}^\mu = \{\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_\mu\}$  und  $\mathcal{D}^{\mu+1} = \mathcal{D}^\mu \cup \{\bar{h}_0\}$  mit paarweise verschiedenen Elementen  $\bar{h}_\nu$ . Die Linie  $\bar{h}_0$  (wie alle anderen auch) ist ein wohlgeordnetes, eindimensionales Gitter, das laut Lemma 4.1 nur endlich viele Linear-komponenten enthalten kann. Eine abwechselnde Anwendung von (5.12), was semilineare Mengen liefert, sowie Translationen ( $\text{shift}$ ), die das Durchkreuzen von  $\bar{h}_0$  simulieren, kommt deshalb in endlicher Zeit zum Stillstand und liefert eine semilineare Menge.  $\square$

**Theorem 5.14.** Die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme ohne kontrollierende Zustände beträgt  $n^* = 4$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_\nu(M_0) \in \text{sem}(\mathbb{N}^4) \text{ für alle } M_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^4).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar.  $\square$

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

Unsere Beweisführung liefert nahezu automatisch noch ein weiteres Resultat, nämlich die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen von dreidimensionalen Petri-Netzen ohne kontrollierende Zustände, allerdings (wegen Theorem 5.7) mit höchstens einer inhibitor-Stelle. Offensichtlich sind sowohl inhibitor-Kanten, als auch kontrollierende Stellen in  $H = \{x \in \mathbb{N}^3 \mid x \geq \alpha\}$  für ein  $\alpha \in \mathbb{N}^3$  ohne Bedeutung und es besteht folglich Äquivalenz zu einem dreidimensionalen Vektor-Additionssystem in dieser Region. Das wiederum ist gleichbedeutend mit der Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen in  $H$  (gerade das ist nicht mehr zutreffend, wenn noch zusätzlich kontrollierende Zustände vorhanden sind) und zusammen mit dem Lemma 5.9, das durch nur eine inhibitor-Stelle offensichtlich nicht tangiert wird, erhalten wir wieder unsere Teillösungen in

$$H^i = \{x \in \mathbb{N}^3 \mid x_i \leq \alpha_i\} \text{ für } 1 \leq i \leq 3, \text{ sowie in } H,$$

für die sicherlich gilt (bei geeigneter Wahl von  $\alpha$ ):

$$H^1 \cup H^2 \cup H^3 \cup H = \mathbb{N}^3.$$

Diese Resultate können wir sicherlich genauso verwenden, wie im letzten Beweis (die letzte Abbildung zeigt exakt die Menge  $\mathcal{D}$  in  $\mathbb{N}^3$ ). Deshalb:

**Lemma 5.15.** Für Petri-Netze ohne kontrollierende Zustände mit höchstens einer inhibitor-Stelle gilt:  $n^* \geq 3$  □

Dieses Lemma verschärft zwar etwas unsere Aussagen über Vektor-Additionssysteme mit inhibitor-Vektoren – liefert jedoch keine exakten Semilinearitätsgrenzen (auf diese Fragen kommen wir im letzten Kapitel (§7) zurück). Für Vektor-Ersetzungssysteme gilt jedoch wegen Lemma 4.4 mehr:

**Theorem 5.16.** Die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für Vektor-Ersetzungssysteme mit genau einem inhibitor-Vektor und ohne kontrollierende Zustände (auch für Petri-Netze mit beliebig vielen inhibitor-Kanten, aber mit nur einer inhibitor-Stelle) beträgt  $n^* = 3$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_{\nu}(M_0) \in \text{sem}(\mathbb{N}^3) \text{ für alle } M_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^3).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar. □

**§5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN**

---