§7. OFFENE FRAGEN. DISKUSSION.

Die abschließende Diskussion beginnen wir mit den zuletzt gemachten Beobachtungen hinsichtlich der WPNC-Berechenbarkeit. Die echten Inklusionen zwischen den Klassen WPNC, $\mathrm{WPNC}^{1'}$ *und* $\mathrm{WPNC}^{2'}$ *sind sicherlich ein elegantes Resultat, das letzten Endes das belegt, was wir längst vermutet haben - nämlich, daß die inhibitor-Kanten (und eine einzelne ebenfalls) eine qualitative Verstärkung des Grundmodells darstellen. Dennoch drängen sich dabei einige Fragen auf. Die erste Frage wirft die ganzzahlige Division auf, die nur in einem ihrer Argumente fallend ist und trotzdem nicht* $\mathrm{WPNC}^{1'}$*-berechenbar zu sein scheint. Der Beweis für* $\lfloor \cdot / \cdot \rfloor \notin \mathrm{WPNC}^{1'}$ *könnte uns dem bislang unbekannten Kriterium für die Zugehörigkeit von Funktionen zu den entsprechenden WPNC-Klassen näher bringen. Letzteres ist wohl die wichtigste offene Frage in diesem Zusammenhang. Ein schwaches Kriterium haben wir im letzten Kapitel kennengelernt und zum Teil erfolgreich angewandt:*

$$\left.\begin{array}{r}\textit{Anzahl der}\\ \textit{inhibitor-Kanten}\end{array}\right\} \geq \left\{\begin{array}{l}\textit{Anzahl der Argumente, in denen}\\ \textit{die Funktion nicht wachsend ist.}\end{array}\right.$$

Das Beispiel der ganzzahligen Division (und auch z.B. der Modulo-Division zur variablen Basis: $x \bmod y \notin \mathrm{WPNC}^{2'}$*?) zeigt jedoch, daß dieses Kriterium nicht das exakte sein kann. Aber auch einargumentige Funktionen werfen einige offene Probleme auf. Die Minsky-Barsdin Theoreme (§6) definieren klar den dimensionsbezogenen Rahmen in Petri-Netzen, die wir als wettbewerbsfrei bezeichnet haben. Diese Eigenschaft könnte sich als hilfreich erweisen, wenn mehr bekannt wäre über obere Schranken z.B. hinsichtlich der kontrollierenden Zustände in den relevanten Zählerautomaten. Die zu erwartenden Resultate, die auf diesem Wege gewonnen werden könnten, blieben dennoch wahrscheinlich weit unterhalb dessen, was die Erfahrungen aus dem vorherigen Kapitel vermuten lassen. Die dort betrachteten Funktionen* $f \in \mathcal{F}$ *vermochten wir ja in WPNC's mit nur einer inhibitor-Kante zu berechnen.*

Die Theoreme 5.4 und 5.5 (§5) belegen, daß die inhibitor-Kanten die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen nur geringfügig verschieben. Auf der anderen Seite zeigt das Theorem 5.14 (zusammen mit dem Lemma 4.4), daß bereits genau eine inhibitor-Kante eine solche Verschiebung verursacht. Dieser Umstand würde eher auf die Unentscheidbarkeit des bislang offenen Erreichbarkeitsproblems für Petri-Netze mit genau einer inhibitor-Kante hindeuten. Allerdings sollen wir diese Deutung nicht überbewerten - nicht zuletzt angesichts der Tatsache, daß kontrollierende Zustände viel wirksamer sind in dieser Hinsicht. Letzteres exakt zu beweisen, würde mit Sicherheit sehr aufwendige Überlegungen (wie z.B. die Theoreme 5.4 und 5.14) erforderlich machen. Auf der anderen

Seite läßt das Theorem 5.4 vermuten, daß die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen für Petri-Netze ohne kontrollierende Zustände auf die Simulierbarkeit eines gewissen, in jeder Hinsicht „minimalen" Netzes mit kontrollierenden Zuständen hinauslaufen. Diese These wird wohl kaum direkt beweisbar sein. Sie wird vielmehr aus den dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen für alle Grundmodell-Varianten folgen. Wir werden sehen, daß recht beachtliche Aussagen in Anlehnung an diese These möglich sind, und deshalb wollen wir sie hier möglichst stark untermauern.

Zunächst müssen wir uns die Frage stellen, welche Petri-Netze (mit kontrollierenden Zuständen und nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen) die einfachsten sind im Hinblick auf eine eventuelle Simulation. Ist vielleicht das Petri-Netz aus dem Beispiel Abb.5 ein solch einfaches Petri-Netz (mit weniger als zwei inhibitor-Kanten)? Diese Frage werden wir exakt beantworten können. Was ist dann aber die Konsequenz daraus? Nehmen wir an, daß die Simulation der kontrollierenden Zustände aus diesem Beispiel mit Hilfe von verfügbaren Mitteln (bestimmter Anzahl der zusätzlichen Stellen, sowie inhibitor-Kanten) nachweislich nicht möglich ist. Sind die Erreichbarkeitsmengen der zusätzlichen Stellen beschränkt (oder beschränken wir deren Aufnahmekapazitäten willkürlich), dann simulieren diese ein einfacheres Netz, als das einfachste mit nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen. Trifft das nicht zu, dann kann man daraus - beweistheoretisch gesehen - noch nicht auf die Semilinearität schließen. Allerdings liegt diese Vermutung nahe - nicht zuletzt wegen Lemma 4.6 und der „Neigung" der Petri-Netze zur Semilinearität, wenn hinreichend viele Stellen gleichzeitig beliebig groß werden können (inhibitor-Kanten sind in diesen Regionen ohnehin bedeutungslos). Dieses setzen wir voraus, wobei hier auch andere Formulierungen für den gleichen Sachverhalt denkbar sind.

Auf diese These aufbauend zeigen wir, daß das Petri-Netz aus Abb.5 in jeder Hinsicht das einfachste mit nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen ist. Zunächst beobachten wir, daß mindestens zwei kontrollierende Zustände erforderlich sind, denn gerade das besagt unsere These. Eine zweite 0-Transition (die erste reine Zustandsüberführungstransition ist die t_2) würde die kontrollierenden Zustände überflüssig machen. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß sämtliche Transitionenbeschriftungen, die unser Petri-Netz beinhaltet, auch erforderlich sind. Im Hinblick auf die Simulation nämlich, sind nur diese von Belang. Fehlt eine Transition mit $q_j \to q_j$, dann können wir den Zustand q_j umgehen. Das Fehlen einer Transition mit $q_j \to q_k$, $j \neq k$ macht wiederum den letzten unerreichbar, es sei den, der Anfangspunkt beinhaltet gerade diesen Zustand. Dann aber können wir die Erreichbarkeitsmenge in diesem Zustand (semilinear laut unserer These) als Anfangsmenge für das Netz, das nur in dem anderen Zustand schaltet, nehmen. Das heißt aber, daß hinsichtlich der Art und Anzahl der Transitionen (und laut Lemma 5.1 auch hinsichtlich der Dimension) dieses Netz das am einfachsten zu simulierende ist (mit eben nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen). Damit wäre die Frage der dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen auf die Simulierbarkeit des Petri-Netzes aus Abb.5, oder eines anderen mit den gleichartigen Transitionenbeschriftungen reduziert. Entscheidend ist dabei nicht nur die obige These, sondern auch das Theorem 5.4.

Die Folgerungen sowie die bislang erzielten Resultate (§5) stellen wir tabellarisch zusammen, wobei die Semilinearitätsgrenzen, die aufgrund unserer These gewonnen wurden, unter Vorbehalt zu stellen und daher mit einem Fragezeichen versehen sind. Die Fragen der Simulierbarkeit, die zu diesen Erkenntnissen geführt haben, überlassen wir dem Leser.

Gebilde	inhibitor-Kanten. inhibitor-Stellen.	Semilinearitätsgrenze. Referenz.
Vektor-Additions-/Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen	$\iota = 0$ $\sigma = 0$	$n^* = 2$ *Lemma 5.3, Abb.5*
Vektor-Additions-/Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen	$\iota = 1$ $\sigma = 1$	$n^* = 2$ *Theorem 5.4, Abb.5*
Vektor-Additions-/Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen	$\iota \geq 2$ $\sigma = 1$	$n^* = 2$ *Theorem 5.5, Abb.5*
Vektor-Additions-/Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen	$\iota \geq 2$ $\sigma \geq 2$	$n^* = 1$ *Theorem 5.6, Abb.9*
Vektor-Additionssysteme ohne kontrollierende Zustände	$\iota = 0$ $\sigma = 0$	$n^* = 5$ *Lemma 5.2, Anh. A*
Vektor-Additionssysteme ohne kontrollierende Zustände	$\iota \geq 1$ $\sigma = 1$	$n^* = 5^?$ $(3 \leq n^* \leq 5)$ *Lemma 5.15, Anh. A*
Vektor-Additionssysteme ohne kontrollierende Zustände	$\iota \geq 2$ $\sigma \geq 2$	$n^* = 4^?$ $(1 \leq n^* \leq 4)$ *Theorem 5.6, Abb. 10*
Vektor-Ersetzungssysteme ohne kontrollierende Zustände	$\iota = 0$ $\sigma = 0$	$n^* = 4$ *Theorem 5.14, Abb.2*
Vektor-Ersetzungssysteme ohne kontrollierende Zustände	$\iota \geq 1$ $\sigma = 1$	$n^* = 3$ *Theorem 5.16, Abb.4*
Vektor-Ersetzungssysteme ohne kontrollierende Zustände	$\iota \geq 1$ $\sigma \geq 2$	$n^* = 3^?$ $(1 \leq n^* \leq 3)$ *Theorem 5.6, Abb.4*

Das wohl wichtigste und leider nach wie vor offene Problem bleibt das Erreichbarkeitsproblem für Petri-Netze mit genau einer inhibitor-Kante. Wir machen abschließend eine Aussage, die möglicherweise zu einer Teillösung dieses Problems führen kann, die aber gleichzeitig ein interessantes, dimensionsunabhängiges Resultat im Hinblick auf die Semilinearität liefert.

§7. OFFENE FRAGEN. DISKUSSION.

Definition 7.1. *Eine inhibitor-Transition t^ι in einem Petri-Netz mit (PN*) ist* <u>*schwach-monoton*</u>, *wenn entweder $\natural(s,t^\iota) \in \{\iota, 0\}$ oder $\natural(t^\iota, s) = 0$ für alle $s \in S$ gilt. Für die Translationen (Additionsvektoren), die auf eine solche Transition zurückgehen, gilt dann entweder $v^\iota \geq 0$ oder $v^\iota \leq 0$.*

Theorem 7.1. Sei $\mathcal{V}$ ein Vektor-Additionssystem mit (genau) einem und schwach-monotonen inhibitor-Vektor v^ι, sowie der inhibitor-Hyperebene $s_\iota = 0$, und seien $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ weitere Vektor-Additionssysteme, mit:

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} \setminus \{v^\iota\}\,,$$[1]

$$\mathcal{W} = \mathcal{V} \setminus \{v^\iota\} \cup \{v^\kappa\} \text{ mit } v^\kappa = v^\iota + 0\,.$$[2]

Es gilt: $\mathcal{R}_\mathcal{V}(x_0) = \mathcal{R}_\mathcal{U}(\mathcal{R}_\mathcal{W}(\mathcal{R}_\mathcal{U}(x_0))|_{s_\iota = 0})$.

Beweis: *Offensichtlich gilt:*

$$(*) \quad \mathcal{R}_\mathcal{U}(\cdot) \subseteq \mathcal{R}_\mathcal{V}(\cdot) \subseteq \mathcal{R}_\mathcal{W}(\cdot)\,.$$

Betrachten wir einen Schaltpfad in $\mathcal{W}$ zwischen zwei Punkten aus der inhibitor-Hyperebene. Ist die inhibitor-Transition $v^\iota \in \mathcal{V}$ schwach-positiv, dann könnte sie zuerst feuern (genauso oft, wie in dem Schaltpfad in $\mathcal{W}$) und die restlichen Transitionen danach, in unveränderter Reihenfolge. Umgekehrt, könnte eine schwach-negative Transition zuletzt feuern, nachdem die restlichen Transitionen bereits gefeuert haben. Wir beobachten also, daß unzulässige Schaltpfade u.U. so permutiert werden können, daß sie zulässig werden. Ein permutierter Schaltpfad trifft sicherlich den gleichen Endpunkt und daraus folgt:

$$\mathcal{R}_\mathcal{W}(\cdot)|_{s_\iota = 0} \subseteq \mathcal{R}_\mathcal{V}(\cdot)|_{s_\iota = 0}\,.$$

Zusammen mit (*) erhalten wir sogar:

$$\mathcal{R}_\mathcal{W}(\cdot)|_{s_\iota = 0} = \mathcal{R}_\mathcal{V}(\cdot)|_{s_\iota = 0}\,.$$

Folglich gilt für jeden Anfangspunkt x_0 aus der inhibitor-Hyperebene:

$$\mathcal{R}_\mathcal{V}(x_0) = \mathcal{R}_\mathcal{U}(\mathcal{R}_\mathcal{W}(x_0)|_{s_\iota = 0})\,.$$

---

1 Im äquivalenten Petri-Netz bedeutet das den Ausschluß der inhibitor-Transition.

2 Erinnern wir uns an die "Pseudoarithmetik", die das Element ι einschließt (§2, Seite 17). Demnach gilt $0 + \iota = 0$. Die Addition des 0-Vektors zum v^ι ersetzt also sämtliche Komponenten gleich ι durch 0 und läßt die übrigen unverändert. Im äquivalenten Petri-Netz ist das gleichbedeutend mit dem Ausschluß der inhibitor-Kante.

Liegt der Anfangspunkt x_0 *nicht auf der inhibitor-Hyperebene, dann können wir zuerst die Menge der auf dieser Ebene erreichbaren Punkte unter Ausschluß der inhibitor-Transition berechnen.* $\mathfrak{R}_u(x_0)$ *ist dann für* x_0 *einzusetzen. Das ergibt:*

$$\mathfrak{R}_v(x_0) = \mathfrak{R}_u(\mathfrak{R}_w(\mathfrak{R}_u(x_0))|_{s_\iota=0}) . \qquad ¤$$

Sicherlich könnte man eine ähnliche, jedoch entsprechend stärker rekursive Gleichung aufstellen, falls mehrere, aber ausschließlich schwach-monotone inhibitor-Transitionen vorhanden sind.

Die obige Rekursionsgleichung beschreibt die Erreichbarkeitsmengen von Petri-Netzen (mit einer schwach-monotonen inhibitor-Transition) mit Hilfe von Erreichbarkeitsmengen gewöhnlicher Petri-Netze. Zwar ist deren Beschreibungsproblem unentscheidbar - entscheidbar hingegen ist das Erreichbarkeitsproblem. Folglich könnte man den Algorithmus, z.B. aus [16], rekursiv anwenden... - wenn da der Durchschnitt mit der inhibitor-Hyperebene nicht dazwischen läge. Schließt das aber unbedingt die Beschreibung der Erreichbarkeitsmengen ein ? Auch diese Frage lassen wir hier offen. Im Hinblick auf die Semilinearität gewinnen wir dennoch das folgende Resultat:

Korollar 7.2. Dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenzen sind von schwach-monotonen inhibitor-Transitionen unabhängig. ¤

---

§7. OFFENE FRAGEN. DISKUSSION.