

**SCHLÜSSELBEGRIFFE: Petri-Netz, Vektor-Additionssystem, Vektor-Ersetzungssystem, kontrollierender Zustand, inhibitor-Kante, Erreichbarkeitsmenge, Semilinearität.**

<b>INHALTSVERZEICHNIS</b>		
<b>§1.</b>	<b>HISTORISCHES, MOTIVATION</b>	<b>5-8</b>
Petri-Netze und deren Bedeutung in der Systemanalyse, systemanalytische Entsprechung des Erreichbarkeitsproblems, Bekanntes hinsichtlich des Gleichheits- und Inklusionsproblems, Beschreibungsproblem der Erreichbarkeitsmengen, Grenzen der Anwendbarkeit der gewöhnlichen Petri-Netze, WPNC-Berechenbarkeit, inhibitor-Kanten und deren Auswirkung auf die Entscheidbarkeit der Schlüsselprobleme, einfache (semilineare) Erreichbarkeitsmengen, bekannte Grenzen der Semilinearität, Motivation und Inhaltsüberblick.		
<b>§2.</b>	<b>GRUNDLEGENDE KONZEPTE</b>	<b>9-22</b>
gewöhnliche Petri-Netze, Transitionenfolgen, Schaltfolgen, Schaltpfade, kontrollierende Stellen, Erreichbarkeitsmengen und deren Schlüsselprobleme, Vektor-Ersetzungssysteme, Test- und Ersetzungsvektoren, Vektor-Additionssysteme, Translationsvektoren, Petri-Netze mit inhibitor-Kanten, Vektor-Additions- und Ersetzungssysteme mit inhibitor-Vektoren, Beispiele.		
<b>§3.</b>	<b>SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS</b>	<b>23-34</b>
Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen, Projektionen der Erreichbarkeitsmengen, Simulation der kontrollierenden Stellen und Zustände in Vektor-Additionssystemen und Vektor-Ersetzungssystemen, begrenzte Simulierbarkeit von inhibitor-Kanten, Aufwand der Simulation, Beispiele.		
<b>§4.</b>	<b>SEMILINEARE ERREICHBARKEITSMENGEN</b>	<b>35-42</b>
Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen, Projektionen der Erreichbarkeitsmengen, Simulation der kontrollierenden Stellen und Zustände in Vektor-Additionssystemen und Vektor-Ersetzungssystemen, begrenzte Simulierbarkeit von inhibitor-Kanten, Aufwand der Simulation, Beispiele.		
<b>§5.</b>	<b>DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN</b>	<b>43-72</b>
Auswirkungen der kontrollierenden Stellen und Zustände, sowie inhibitor-Kanten auf dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenzen, dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenzen und Algorithmen zur Berechnung von Erreichbarkeitsmengen für zweidimensionale Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen und verschiedener Anzahl von inhibitor-Kanten, sowie für vierdimensionale und gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme, Bedeutung von inhibitor-Stellen, weitere Semilinearitätsgrenzen.		
<b>§6.</b>	<b>WPNC-BERECHENBARKEIT, ZÄHLERAUTOMATEN</b>	<b>73-82</b>
Schwache Petri-Netz Computer, WPNC-Berechenbarkeit der Addition, Multiplikation, Exponentialfunktion u.a., Subtraktion, Modulo-Division und die Notwendigkeit von inhibitor-Kanten für deren WPNC-Berechenbarkeit, Zählerautomate, Minsky-Barsdin Theoreme, Konsequenzen.		
<b>§7.</b>	<b>OFFENE FRAGEN, DISKUSSION</b>	<b>83-88</b>
WPNC-Klassen, These über einfachste Petri-Netze mit nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen und daraus resultierende dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenzen, Satz über schwach-monotone inhibitor-Transitionen, Invarianz der Semilinearität unter schwach-monotonen inhibitor-Transitionen.		
<b>Anhang A</b>	<b>SIMULATION DER KONTROLLIERENDEN ZUSTÄNDE IN GEWÖHNLICHEN VEKTOR-ADDITIONSSYSTEMEN</b>	<b>89-94</b>
<b>Anhang B</b>	<b>LITERATURVERZEICHNIS</b>	<b>95-98</b>



## §1. HISTORISCHES, MOTIVATION.

*Petri-Netze (konzipiert 1962 durch C.A. Petri [21]) liefern ein sehr komfortables und mittlerweile kaum wegzudenkendes Hilfsmittel bei der Darstellung und Analyse verschiedenartiger Vorgänge. Insbesondere die systemanalytischen Aspekte im Zusammenhang mit interaktiv ablaufenden Prozessen, wie z.B. Synchronisation (locking), Systemstillstand (deadlock), Objektverfügbarkeit (scheduling) können in einer sehr anschaulichen Form angegangen werden [5],[12]. Die zu den Petri-Netzen äquivalenten algebraischen Aggregate, wie Vektor-Additions- bzw. Ersetzungssysteme<sup>1</sup> erleichtern zudem die rechnergestützte Simulation von derartigen Interaktionen.*

*Die naturgemäß schwierigen systemanalytischen Probleme, wie z.B. Aspekte der Lebendigkeit eines vorliegenden Systems [7],[14], werden in Anlehnung an das Petri-Netz Modell zwar anschaulicher, aber selbstverständlich nicht leichter. So sind beispielsweise Fragen im Zusammenhang mit den Erreichbarkeitsmengen<sup>2</sup> von Petri-Netzen häufig gar nicht algorithmisch entscheidbar - und wenn, dann meistens extrem komplex. Andere wiederum konnten bislang weder als entscheidbar, noch als unentscheidbar ausgewiesen werden.*

*Andererseits sollte nicht übersehen werden, daß die in [21] vorgestellten Gebilde, die wir im weiteren als „gewöhnliche Petri-Netze“ bezeichnen wollen, nicht uneingeschränkt universell sind. Auf die Grenzen deren Anwendbarkeit stößt man z.B. beim Simulieren von Berechnungsvorgängen. Die durch Rabin konzipierte schwache Berechenbarkeit durch ein (gewöhnliches) Petri-Netz (angelehnt an das WPNC-Modell<sup>3</sup>), gilt nur für eine bestimmte Klasse von Funktionen. Zwar sind sogar einige stark wachsende Funktionen in diesem Sinne berechenbar (z.B. die Ackermann-Funktion - [18]), aber bereits bei relativ simplen, nicht monoton wachsenden Funktionen entsteht die Notwendigkeit, das Feuern von Transitionen an das Leersein von bestimmten Stellen zu knüpfen. Das so modifizierte Petri-Netz enthält sog. inhibitor-Kanten und ist nur eine der inzwischen zahlreichen Varianten des Grundmodells. Andere enthalten z.B. Stellen mit eingeschränkten Aufnahmekapazitäten oder verzweigte Kanten - um nur einige zu nennen [27]. Diese Modifikationen machen aber die o.e. Probleme, z.B. das Erreichbarkeitsproblem, offensichtlich nicht leichter, denn die WPNC-Berechenbarkeit von hinreichend komplizierten Funktionen (z.B. notwendigerweise auf der Basis von Petri-Netzen mit inhibitor-Kanten) ist gleichbedeutend mit entsprechend*

---

<sup>1</sup> engl. vector addition system, vector replacement system.

<sup>2</sup> entsprechen den Mengen aller erreichbaren Systemzustände.

<sup>3</sup> engl. weak Petri net Computer. Es handelt sich dabei um ganzzahlige Funktionen [16],[25].

diffizilen Erreichbarkeitsmengen, mit allen Konsequenzen für die damit zusammenhängenden Probleme. So modifizierte Petri-Netze sind demnach zwar leistungsfähiger, können aber die an sie angelehnte Systemanalyse erheblich erschweren oder gar unmöglich machen.

Diesen Sachverhalt beobachten wir anhand des sog. allgemeinen Erreichbarkeitsproblems<sup>4</sup>. Die Frage, ob ein gewisser Zustand von einem fixierten Anfangszustand aus erreicht werden kann, ist von essentieller Bedeutung für viele systemanalytische Aspekte (z.B. Erreichbarkeit eines Zustandes, der dem Systemstillstand entspricht [5] oder Systemlebendigkeit<sup>5</sup> [14],[29]), sowie für viele Probleme aus dem Bereich der Algebra und Numerik. Dieses Problem ist entscheidbar, bezogen auf die gewöhnlichen Petri-Netze - unentscheidbar hingegen für Petri-Netze mit inhibitor-Kanten<sup>6</sup> [7].

Interessant ist aber auch die Frage, wie schwer das Erreichbarkeitsproblem ist und wie es praktisch gelöst werden kann (hier denken wir stets an gewöhnliche Petri-Netze). Die naheliegende Vorgehensweise dieses Problem durch Bestimmung der Erreichbarkeitsmenge zu lösen ist überraschenderweise algorithmisch nicht realisierbar. Unentscheidbar ist auch die Frage der mengentheoretischen Inklusion, bzw. Gleichheit von Erreichbarkeitsmengen zweier Petri-Netze (sog. Inklusions- bzw. Gleichheitsproblem<sup>7</sup> [2],[9],[28]). So verwundert es nicht, daß die in [16],[26] vorgestellten Algorithmen keinerlei Aspekte der Erreichbarkeitsmengenbeschreibung angehen. Eine brauchbare Beschreibung der Erreichbarkeitsmengen ist nur bei den gegenüber dem Grundmodell etwas vereinfachten Petri-Netzen möglich [1],[6],[17],[20]. All das zeugt von ziemlicher Nähe zur Grenze des algorithmisch Machbaren und es kann folglich davon ausgegangen werden, daß das Erreichbarkeitsproblem sehr komplex ist. Selbst bei paralleler Abarbeitung kommt man um exponentielle Laufzeiten nicht herum [15].

Die Unentscheidbarkeit des Inklusionsproblems und die darauf zurückgehenden enormen Schwierigkeiten bei der praktischen Lösung des (allgemeinen) Erreichbarkeitsproblems veranlassen uns zu fragen, unter welchen Umständen die unentscheidbaren Probleme entscheidbar, insbesondere das Erreichbarkeitsproblem einfacher werden kann. Wir haben bereits angedeutet, daß die Erreichbarkeitsmengen von gewissen Klassen der gewöhnlichen Petri-Netze berechnet werden können. Der Preis dafür ist eine gegenüber dem Grundmodell eingeschränkte Leistungsfähigkeit (bisher sprachen wir von leistungssteigernden Varianten des Grundmodells) - diese ist aber in der Praxis häufig ausreichend. Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn die Erreichbarkeitsmenge endlich ist, was sogar feststellbar ist [11]. Es ist nämlich in diesem Falle möglich, die Erreichbarkeitsmenge zu berechnen, und folglich ist das (endliche) Inklusionsproblem (und damit auch das Gleichheitsproblem) entscheidbar [11], wenn auch von exorbitanter Komplexität [18]. Auch unendliche Erreichbarkeitsmengen können berechenbar sein - vorausgesetzt, daß deren

---

4 engl. general reachability problem.

5 engl. liveness problem.

6 bei zwei und mehr inhibitor-Kanten besteht Äquivalenz zum Halteproblem.

7 engl. inclusion problem, equality problem.

## §1. HISTORISCHES, MOTIVATION.

*Struktur hinreichend regulär ist, z.B. semilinear, d.h. erfaßbar durch die sog. Presburger Arithmetik [22]. (Die Semilinearität der Erreichbarkeitsmenge ist ebenfalls algorithmisch feststellbar.)*

*Derartige Resultate können - neben der Vereinfachung vieler Probleme - auch eine andere Rolle spielen. Noch vor wenigen Jahren waren sie Teillösungen des damals noch offenen Erreichbarkeitsproblems und Meilensteine auf dem Wege zu dessen endgültiger Lösung. Gerade dieser Umstand war das Hauptmotiv für die Entstehung dieser Arbeit. Das bislang offene Erreichbarkeitsproblem von Petri-Netzen mit genau einer- und dessen Unentscheidbarkeit bei mehreren inhibitor-Kanten haben uns veranlaßt, nach ähnlichen Resultaten zu suchen. Insbesondere konzentrieren wir uns in der vorliegenden Arbeit auf die Frage, inwieweit die auf der Semilinearität basierenden Aussagen auf Petri-Netze mit inhibitor-Kanten übertragbar sind.*

*Die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen ist zunächst bei Petri-Netzen von geringer Dimension<sup>8</sup> zu erwarten. Diese Vermutung bestätigte Van Leeuwen [25] für (gewöhnliche) Vektor-Additionssysteme der Dimension  $n \leq 3$ , gefolgt von Hopcroft und Pansiot [10], die sogar die exakte, dimensionsbezogene Grenze der Semilinearität ermittelten ( $n \leq 5$ ). In der vorliegenden Arbeit wird u.a. untersucht, ob inhibitor-Kanten diese Grenze tangieren. Unabhängig von der Dimension sind die Erreichbarkeitsmengen von sog. selbstdualen Petri-Netzen stets semilinear [4]. Das Erreichbarkeitsproblem ist in diesem Falle äquivalent zum Wortproblem kommutativer Halbgruppen<sup>9</sup> [4],[8], und folglich ist dessen Komplexität von besonderem Interesse für uns [19].*

*Desweiteren werden einige ergänzende Aussagen über die Struktur der Erreichbarkeitsmengen von gewöhnlichen Vektor-Ersetzungssystemen gemacht. Die hier ermittelte dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze gibt zugleich Aufschluß über das Kompaktierungspotential kontrollierender Stellen, die ein Bestandteil von Vektor-Ersetzungssystemen, nicht aber Vektor-Additionssystemen sind. Die Auswirkung solcher Stellen auf die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze gewöhnlicher Petri-Netze wird damit ebenfalls geklärt. Die Kombination: kontrollierende Stellen und inhibitor-Kanten, ist in diesem Zusammenhang etwas diffiziler und wird in der vorliegenden Arbeit nur im Sinne von oberen Schranken geklärt (ein möglicher Weg zur Beantwortung relevanter Fragen hinsichtlich dieser Konstellation wird durch eine entsprechend untermauerte These mit weiteren Hinweisen aufgezeichnet). Außerdem diskutieren wir Vektor-Additionssysteme, bei denen das Feuern von Transitionen zusätzlich an das Vorliegen eines bestimmten Zustandes geknüpft ist. Diese Gebilde sind leistungsfähiger und besitzen eine Semilinearitätsgrenze von  $n \leq 2$  [10]. Sog. Vektor-Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen werden definiert und deren Semilinearitätsgrenze ermittelt. Auch hier wird die Auswirkung von inhibitor-Kanten auf diese Grenze untersucht, was uns ein Resultat liefert, das in Anbetracht der Minsky-Barsdin Theoreme [30] zwar vermutet, jedoch nicht hergeleitet werden konnte.*

---

<sup>8</sup> gemeint ist die Anzahl der Stellen.

<sup>9</sup> engl. word problem for commutative semigroups.

## S1. HISTORISCHES, MOTIVATION.

*Abschließend diskutieren wir einige offene Fragen, z.B. das Erreichbarkeitsproblem der Petri-Netze mit genau einer inhibitor-Kante. Ein interessanter Spezialfall geht auf schwach-monotone inhibitor-Transitionen zurück. Die Rückführung auf die Erreichbarkeitsmengen gewöhnlicher Petri-Netze ist wegen der Unentscheidbarkeit des Inklusionsproblems zwar noch nicht die abschließende Lösung des Erreichbarkeitsproblems, kann aber sicherlich als ein guter Tip auf dem Wege dahin angesehen werden.*

*Die vorliegende Arbeit vermittelt Denkanstöße hinsichtlich vielerlei offener Probleme, z.B. hinsichtlich der Projektionen der Petri-Netz-Erreichbarkeitsmengen auf Stellen, um nur ein weiteres, bislang ungelöstes Problem zu nennen. Diese Projektionen sind bei gewöhnlichen Vektor-Additionssystemen unabhängig von der Dimension semilinear [3] - es ist allerdings unklar, wieviele inhibitor-Kanten diesen Sachverhalt verändern können.*

---

## §2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE.

Die Diskussion der grundlegenden Konzepte lehnen wir zunächst an gewöhnliche Petri-Netze an.

**Definition 2.1.** Ein gewöhnliches Petri-Netz ist ein Tupel  $\mathcal{P} = (S, T, \xi)$  mit folgenden Komponenten und Eigenschaften:

- (PN1)  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  ist eine endliche Menge von Stellen;
- (PN2)  $T = \{t_1, \dots, t_l\}$  ist eine endliche Menge von Transitionen;
- (PN3)  $S \cap T = \emptyset$ ;
- (PN4)  $\xi: (S \times T) \cup (T \times S) \rightarrow \mathbb{N}^1$  ist eine Kantenabbildung.

Das Abbild eines solchen Tupels ist ein gerichteter Graph, mit Stellen und Transitionen als Knoten, sowie beschrifteten Kanten von Stellen zu Transitionen und vice versa. Die Kantenbeschriftung symbolisiert die sog. Kantenvielfachheit, die die Abbildung aus (PN4) beinhaltet. Kanten mit  $\xi(\cdot, \cdot) = 0$  sind als nicht existent anzusehen.

Eine Transition  $t$  kann Ein- und Ausgangsstellen haben (es gilt entsprechend  $\xi(s, t) > 0$ , bzw.  $\xi(t, s) > 0$ ). Stellen, die gleichzeitig Ein- und Ausgangsstellen für eine Transition sind, nennen wir kontrollierende Stellen. Es kann zusätzlich gefordert werden, daß das Petri-Netz solche Stellen nicht enthält. Es gilt dann:

$$(PN^*) \quad \forall s \in S, t \in T: \xi(s, t) = 0 \vee \xi(t, s) = 0.$$

Ein Petri-Netz ist demnach ein rein statisches Gebilde. Dynamische Eigenschaften werden ihm erst durch die sog. Markierung verliehen (wir sprechen vom markierten Petri-Netz):

$$(PN5) \quad m: S \rightarrow \mathbb{N}.$$

Diese Markierung fixiert einen Zustand vom gegebenen Petri-Netz und kann nach bestimmten Regeln, sog. Schaltregeln, verändert werden. Der Zustandsüberführungsvorgang bleibt nur den sog. aktivierten Transitionen vorbehalten.<sup>2</sup> Eine Transition  $t \in T$  ist aktiviert (auch schaltbar), wenn gilt:

---

<sup>1</sup>  $\mathbb{N}$  bedeutet die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen.

<sup>2</sup> Folglich kann keine Zustandsveränderung eintreten, wenn keine Transition aktiviert ist. Das Petri-Netz befindet sich in einem "toten" Zustand (deadlock, [5]). Siehe auch §1.

## §2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

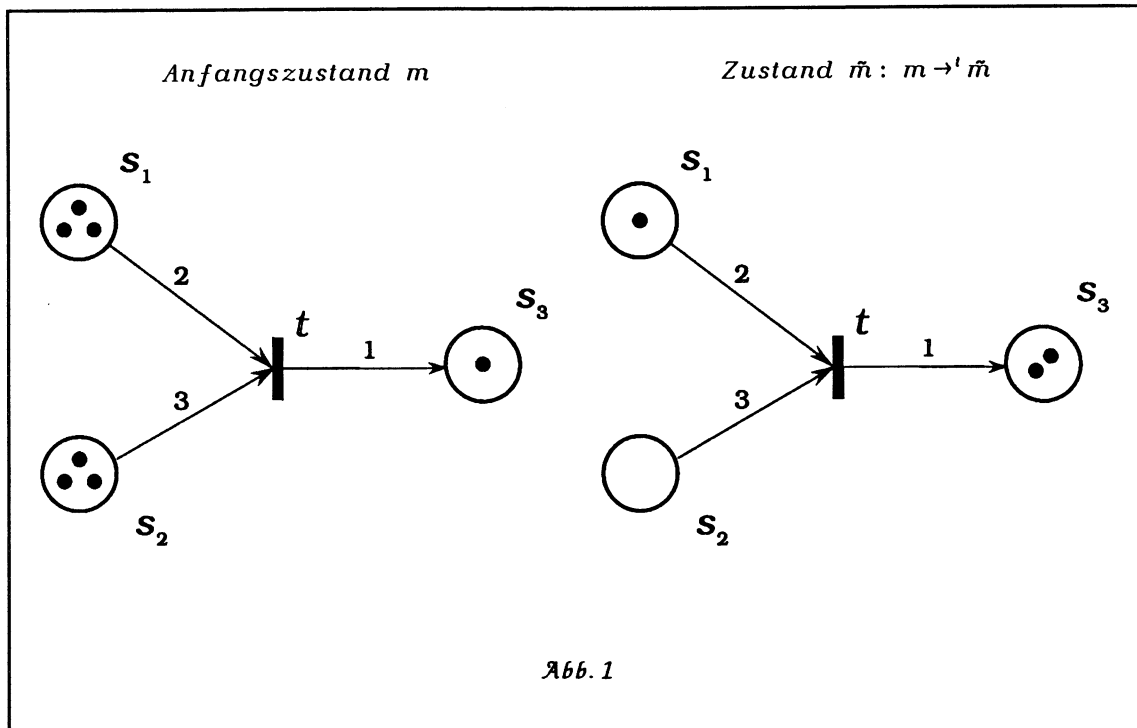
$$\forall s \in S: m(s) - \xi(s, t) \geq 0.$$

Schaltregel für gewöhnliche Petri-Netze: *Feuert eine aktivierte Transition  $t$  im Zustand  $m$  und ist der Zustand nach dem Schaltvorgang  $\bar{m}$  (formal:  $m \rightarrow^t \bar{m}$ ), dann gilt:*

$$\bar{m}(s) = m(s) + \xi(t, s) - \xi(s, t) \text{ für alle } s \in S.$$

Den Schaltvorgang demonstrieren wir anhand eines einfachen Beispiels. Die Abb. 1 zeigt ein Petri-Netz, bestehend aus drei Stellen  $s_1, s_2, s_3$  (dargestellt durch Ringe)<sup>3</sup> und einer Transition  $t$  (dargestellt durch einen Balken), mit folgender Kantenabbildung:

$$\xi(k_1, k_2) = \begin{cases} 3 & \text{falls } k_1 = s_2 \wedge k_2 = t, \\ 2 & \text{falls } k_1 = s_1 \wedge k_2 = t, \\ 1 & \text{falls } k_1 = t \wedge k_2 = s_3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



<sup>3</sup> Keine dieser Stellen ist kontrollierend - (PN\*) ist damit erfüllt.

## §2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

Den Zustand (Markierung) des Petri-Netzes pflegen wir durch direktes Einzeichnen der Marken<sup>4</sup> in die Stellen zu kennzeichnen, wobei die Anzahl der Marken, die eine Stelle  $s$  enthält, mit  $m(s)$  zu identifizieren ist. Der Anfangszustand (Abb. 1 links) ist demnach  $m = (3, 3, 1)$ , der Endzustand (Abb. 1 rechts)  $\bar{m} = (1, 0, 2)$ . Bildhaft gesprochen, wandern die Marken von den Eingangsstellen hinüber auf die Ausgangsstellen unter Berücksichtigung der Kantenvielfachheiten. Ein nochmaliges Feuern von  $t$  ist mangels Marken auf den Eingangsstellen nicht mehr möglich ( $t$  ist nicht mehr aktiviert).

Im allgemeinen werden aber offensichtlich auch weitere Schaltvorgänge möglich sein - insbesondere durch andere Transitionen. Derartige Schaltfolgen sind vor allem im Hinblick auf das bereits angesprochene Erreichbarkeitsproblem von besonderem Interesse für uns. Sei  $T^*$  die Menge aller Wörter über dem (endlichen) Alphabet  $T$ , zusammen mit dem leeren Wort  $\lambda$  ( $T^*$  ist damit ein Monoid hinsichtlich der Konkatenation). Unter einer Transitionenfolge verstehen wir jedes Element  $\tau \in T^*$ .

Sei  $\tau = (t_{j(1)}, \dots, t_{j(k)}) \in T^*$  mit  $j(i) \in \{1, \dots, l\}$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Zunächst müssen wir sicherstellen, daß bei der Umsetzung einer solchen Transitionenfolge nur die augenblicklich aktivierten Transitionen feuern würden. Wir sprechen von einer zulässigen Transitionenfolge (auch Schaltfolge) zu gegebenem Zustand  $m$ , wenn gilt:

$$\forall s \in S, i \in \{1, \dots, k\}: \left[ m(s) + \left( \sum_{v=1}^{i-1} [\kappa(t_{j(v)}, s) - \kappa(s, t_{j(v)})] \right) - \kappa(s, t_{j(i)}) \right] \geq 0.$$

Da jede Schaltfolge eine Art zusammengesetzter Transition ist, können wir die erweiterte Schaltregel für gewöhnliche Petri-Netze folgendermaßen angeben: Feuert eine Schaltfolge  $\tau = (t_{j(1)}, \dots, t_{j(k)}) \in T^*$  im Zustand  $m$  und ist der Zustand nach dem Schaltvorgang  $\bar{m}$  (formal:  $m \rightarrow^\tau \bar{m}$ ), dann gilt:

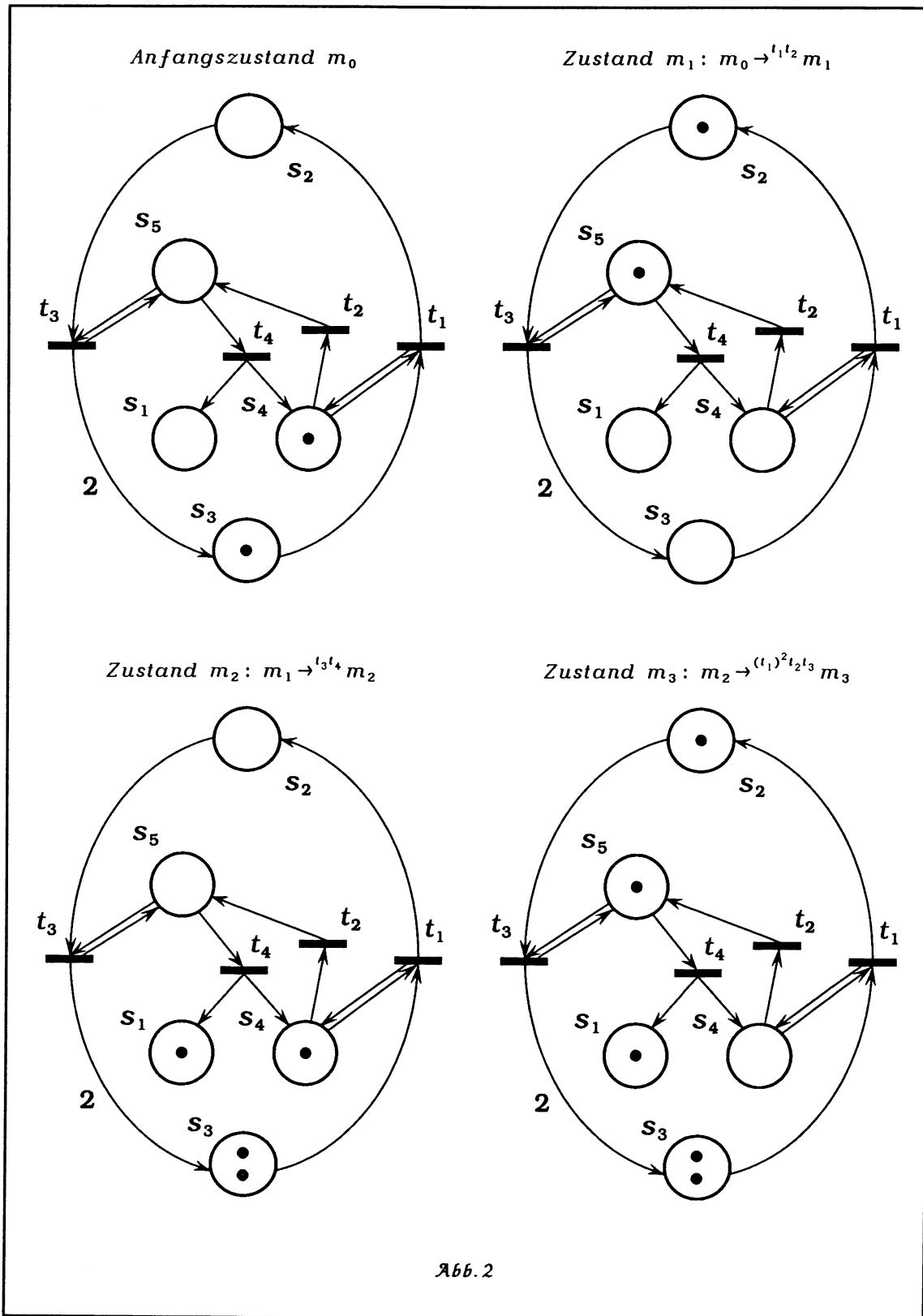
$$\bar{m}(s) = m(s) + \sum_{v=1}^k [\kappa(t_{j(v)}, s) - \kappa(s, t_{j(v)})] \text{ für alle } s \in S.$$

Abrunden wollen wir unsere bisherigen Überlegungen durch ein Beispiel, auf das wir noch öfters in dieser Arbeit verweisen werden.<sup>5</sup> Abb. 2 schildert die Zustandsveränderung eines Petri-Netzes beim Feuern der (zulässigen) Schaltfolge  $t_1 t_2 t_3 t_4 (t_1)^2 t_2 t_3$  mit einigen Zwischenzuständen (die Beschriftung von Kanten mit  $\kappa(\cdot, \cdot) = 1$  wurde weggelassen). Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel enthält dieses Petri-Netz zwei kontrollierende Stellen:  $s_4$  (kontrollierend für  $t_1$ ) und  $s_5$  (kontrollierend für  $t_3$ ). Es gilt nämlich:

<sup>4</sup> engl. token.

<sup>5</sup> An dieser Stelle wollen wir vorwegnehmen, daß die Struktur der Erreichbarkeitsmenge des Petri-Netzes aus unserem Beispiel verhältnismäßig kompliziert ist, und zwar nicht semilinear. Trotzdem werden wir später sehen (§4, Lemma 4.4), daß diese Erreichbarkeitsmengen durch rekursive Relationen beschrieben werden können.

S2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE



## S2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

$$\xi(s_4, t_1) = \xi(t_1, s_4) = 1$$

$$\xi(s_5, t_3) = \xi(t_3, s_5) = 1$$

und folglich ist  $(PN^*)$  nicht erfüllt. (Die vollständige Kantenabbildung kann dem Graphen direkt entnommen werden, was wir dem Leser überlassen wollen).

Diese beiden Stellen weisen darüberhinaus noch eine andere interessante Eigenschaft auf: es gilt stets  $m(s_4) = 1 - m(s_5)$ . Zwei Stellen  $s$  und  $\bar{s}$  nennen wir zueinander komplementär, wenn es eine Konstante  $\alpha = \alpha(m_0) \in \mathbb{N}$ ,<sup>6</sup> gibt, mit:

$$m(\bar{s}) = \alpha - m(s) \text{ für alle } m \in \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0).$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage das Erreichbarkeitsproblem und dessen Aspekte zu definieren.

**Definition 2.2.** Die Erreichbarkeitsmenge eines Petri-Netzes  $\mathcal{P} = (S, T, \xi)$  mit dem Anfangszustand  $m_0$  ist die Menge:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0) = \{m \mid m_0 \rightarrow^{\tau} m \text{ für eine zulässige Schaltfolge } \tau \in T^*\}.$$

Die Erreichbarkeitsmenge kann sich auch auf eine (nicht notwendigerweise endliche) Menge  $M_0$  von Anfangszuständen beziehen:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(M_0) = \{m \mid \exists m_0 \in M_0 : m_0 \rightarrow^{\tau} m \text{ für eine zulässige Schaltfolge } \tau \in T^*\}.$$

Gilt  $m \in \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0)$ , so sagen wir, daß die Markierung  $m$  von  $m_0$  aus erreichbar ist (formal:  $m_0 \rightarrow^{\tau} m$  oder auch  $M_0 \rightarrow^{\tau} m$ , falls es sich um mehrere Anfangszustände handelt). Das allgemeine Erreichbarkeitsproblem ist gleichbedeutend mit der Aufgabe zu entscheiden, ob im gegebenen Petri-Netz ein Zustand  $m$  von einem Anfangszustand  $m_0$  aus erreichbar ist. Das Inklusions- bzw. Gleichheitsproblem ist die Prüfung folgender Relationen für zwei Petri-Netze  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$ :

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0) \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{Q}}(m_0) \text{ für das Inklusionsproblem;}$$

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{Q}}(m_0) \text{ für das Gleichheitsproblem.}$$

---

<sup>6</sup>  $\mathbb{N}_+$  bedeutet die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Eine solche Prüfung ist allerdings nur dann sinnvoll, wenn  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  von gleicher Dimension sind, d.h.  $|\mathcal{S}_{\mathcal{P}}| = |\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}|$ .

Im vorangegangenen Kapitel erwähnten wir bereits, daß diese Probleme unentscheidbar sind, ähnlich wie das Beschreibungsproblem der Erreichbarkeitsmengen. Entscheidbar hingegen ist das Erreichbarkeitsproblem, solange wir bei den gewöhnlichen Petri-Netzen bleiben.

Petri-Netze können einerseits sehr anschaulich durch PN-Graphen dargestellt werden - besitzen aber andererseits äquivalente Strukturen von rein algebraischem Charakter, sog. Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme, denen wir uns jetzt zuwenden wollen.

**Definition 2.3.** Ein Vektor-Ersetzungssystem  $\mathcal{V}$  zum Anfangsvektor  $m_0 \in \mathbb{N}^n$  ist die Menge:

$$\mathcal{V} = \{v_j = (t_j^t, t_j^e) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{Z}^n \mid 1 \leq j \leq l, t_j^t + t_j^e \geq 0\}.$$

Die Vektorpaare aus  $\mathcal{V}$  bestehen jeweils aus dem Testvektor  $t_j^t$  und dem Ersetzungsvektor (auch Translationsvektor)  $t_j^e$ . Der Testvektor entscheidet über die Zulässigkeit der dazugehörigen Ersetzung - diese liegt vor, wenn  $m \geq t_j^t$  gilt. Die Ersetzungsregel lautet:

$$m \rightarrow^{t_j^t} \bar{m} : \bar{m} = m + t_j^e.$$

Aus  $t_j^t + t_j^e \geq 0$  folgt sofort  $\bar{m} \geq 0$  und das ist die erste Affinität zu den gewöhnlichen Petri-Netzen, deren Zustände selbstverständlich als Elemente aus  $\mathbb{N}^n$  angesehen werden können. (Obwohl diese geometrisch gesehen Vektoren sind, sprechen wir häufig von Punkten aus dem  $n$ -dimensionalen Gitter  $\mathbb{N}^n$ , um Verwechslungen mit den Test- und Ersetzungsvektoren vorzubeugen.) Die völlige Gleichwertigkeit der Vektor-Ersetzungssysteme und Petri-Netze ist offensichtlich, da wir ja die Vektorpaare aus  $\mathcal{V}$  folgendermaßen setzen können:

$$v_j = (t_j^t, t_j^e) : t_j^t = \begin{pmatrix} k(s_1, t_j) \\ k(s_2, t_j) \\ \dots \\ \dots \\ k(s_n, t_j) \end{pmatrix}; \quad t_j^e = \begin{pmatrix} k(t_j, s_1) - k(s_1, t_j) \\ k(t_j, s_2) - k(s_2, t_j) \\ \dots \\ \dots \\ k(t_j, s_n) - k(s_n, t_j) \end{pmatrix};$$

---

<sup>7</sup>  $\mathbb{Z}$  bedeutet die Menge der ganzen Zahlen.

## §2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

Greifen wir noch einmal das letzte Beispiel (vgl. Abb. 2) auf. Das zu diesem Petri-Netz äquivalente Vektor-Ersetzungssystem besteht laut obiger Vorschrift aus folgenden Vektorpaaren:

$$v_1 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]; \quad v_2 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right];$$

$$v_3 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]; \quad v_4 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right];$$

Die Äquivalenz  $\mathcal{P} = \mathcal{V}$  läßt einige Begriffe abwechselnd gebrauchen. So sprechen wir von Transitionen, Markierungen, Schaltvorgängen usw. auch wenn ein Vektor-Ersetzungssystem gemeint ist. Umgekehrt, wenn von Petri-Netzen die Rede ist, verstehen wir unter einem Schaltpfad die Punktefolge  $\{m_\nu\}_{1 \leq \nu \leq k}$  aus  $\mathbb{N}^n$  mit  $m_0 \xrightarrow{\tau^{(\nu)}} m_\nu$  und  $\tau^{(\nu)} = (v_{j(1)} v_{j(2)} \cdots v_{j(\nu)}) \in \mathcal{V}^*$ ,  $1 \leq \nu \leq k$  für eine Ersetzungsfolge  $\sigma = (v_{j(1)} \cdots v_{j(k)}) \in \mathcal{V}^*$ , obwohl eigentlich die Transitionenfolge  $\tau = (t_{j(1)} \cdots t_{j(k)}) \in T^*$  gemeint ist. Im übrigen können die mit den Erreichbarkeitsmengen zusammenhängenden Probleme analog formuliert werden, womit wir den Leser nicht langweilen wollen.

Unsere Aufmerksamkeit verdient dafür ein anderer Umstand. Da der Testvektor am Ersetzungsvorgang nicht beteiligt ist, stellt sich die Frage, ob und wann die Ersetzungsregel so modifiziert werden kann, daß wir nur mit einem Vektor aus dem ursprünglichen Vektorpaar auskommen können. Für den Vektor  $v_2$  aus unserem Beispiel könnten wir nur die Ersetzung  $t_j^*$  nehmen und sie als zulässig bezeichnen, falls diese in  $\mathbb{N}^n$  verbliebe, d.h.  $m + t_j^* \geq 0$ . Andererseits ist es unschwer zu erkennen, daß der Vektor  $v_1$  eine solche Vereinfachung nicht zuläßt. Der „Selbsttest“ funktioniert hier nicht. Die Ursache dafür ist im Zusammenhang mit folgender Relation zu sehen:

$$(VAS) \quad t_{j,k}^i > 0 \Rightarrow t_{j,k}^i + t_{j,k}^o = 0 \quad 1 \leq k \leq n.$$

Der Vektor  $v_2$  erfüllt diese Relation -  $v_1$  dagegen nicht. Ein Vektor  $v = (t^1, t^*)$  genügt (VAS) offensichtlich genau dann, wenn die äquivalente Transition  $t$  von keiner Stelle kontrolliert wird. Es besteht demnach die folgende Äquivalenz:

$$[\forall j \in \{1, \dots, l\}, k \in \{1, \dots, n\} : (\text{VAS})] = (\text{PN}^*).$$

Erfüllt ein Petri-Netz die Forderung (PN\*), dann können sämtliche Vektorpaare aus seinem Vektor-Ersetzungssystem nach obiger Vorschrift reduziert werden. Es entsteht ein völlig anderes algebraisches Gebilde, das aber zu dem ursprünglichen Vektor-Ersetzungssystem (und damit zu einem Petri-Netz) äquivalent ist. Wir nennen es ein Vektor-Additionssystem. Vollständigkeitshalber formalisieren wir diesen Begriff in der nachfolgenden Definition.

**Definition 2.4.** Ein Vektor-Additionssystem  $\mathcal{U}$  zum Anfangsvektor  $m_0 \in \mathbb{N}^n$  ist die Menge:

$$\mathcal{U} = \{v_j \in \mathbb{Z}^n \mid 1 \leq j \leq l\}.$$

Jeder Vektor aus  $\mathcal{U}$  ist gleichzeitig ein Test- und Ersetzungsvektor. Eine Ersetzung (oder einfach Addition)  $v_j$  ist zulässig, wenn  $m + v_j \geq 0$  ist, die Ersetzungsregel selbst lautet:  $m \rightarrow^{v_j} \tilde{m} : \tilde{m} = m + v_j$ .

Da unser Petri-Netz aus dem ersten Beispiel (vgl. Abb. 1) offensichtlich (PN\*) genügt, besteht die folgende, doppelte Äquivalenz:

$$\mathcal{P} = \mathcal{V} = \left\{ \left[ \left( \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -2 \\ -3 \\ 1 \end{array} \right) \right] \right\} = \mathcal{U} = \left\{ \left( \begin{array}{c} -2 \\ -3 \\ 1 \end{array} \right) \right\}.$$

Das Vorhandensein einer Mindestzahl von Marken auf bestimmten Stellen als Voraussetzung für eventuelles Feuern von Transitionen ist eine Eigenschaft der gewöhnlichen Petri-Netze, die im allgemeinen nicht invertierbar ist, d.h. es ist nur partiell möglich, die Abhängigkeit des Schaltvorgangs vom Vorhandensein einer Höchstzahl von Marken, insbesondere vom Leersein bestimmter Stellen zu simulieren. Eine solche Abhängigkeit ist aber in manchen Fällen unentbehrlich - vor allem im Hinblick auf die WPNC-Berechenbarkeit<sup>8</sup> (weak Petri net computer) von Funktionen, die das „Testen auf 0“ notwendig machen. Die

---

<sup>8</sup> Die durch Rabin formulierte Theorie der WPNC-Berechenbarkeit werden wir noch genauer diskutieren (§6 - untersucht wird vor allem die Bedeutung der inhibitor-Kanten in diesem Zusammenhang). Den interessierten Leser verweisen wir darüberhinaus auf [18] und [27].

## S2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

Fälle, bei denen sich solche Tests auf der Basis unseres Grundmodells bewerkstelligen lassen, werden wir im nächsten Kapitel diskutieren. Ansonsten ist eine qualitative Verallgemeinerung der gewöhnlichen Petri-Netze erforderlich, die wir jetzt vorstellen wollen.

**Definition 2.5.** Ein Petri-Netz mit inhibitor-Kanten ist ein Tupel  $\mathcal{P}^i = (S, T, \xi)$  mit den Komponenten und Eigenschaften (PN1), (PN2), (PN3), (PN5) (vgl. Definition 2.1) und mit einer erweiterten Kantenabbildung:

$$(IN4) \quad \xi: (S \times T) \cup (T \times S) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\iota\} \text{ mit } \xi^{-1}(\{\iota\}) \subseteq (S \times T).$$

Die so erweiterte Kantenabbildung definiert unter Umständen - neben den üblichen Kanten - auch noch zusätzliche, sog. inhibitor-Kanten (gerichtet nur von Stellen hin zu den Transitionen). Im gewöhnlichen Petri-Netz ist die Menge  $\xi^{-1}(\{\iota\})$  stets leer. Es ist nützlich, die Vielfachheiten dieser Kanten mit 0 zu identifizieren. Wir definieren daher die additiven Verknüpfungen von  $\iota$  mit allen anderen Elementen aus  $\mathbb{N} \cup \{\iota\}$  folgendermaßen:

$$\alpha + \iota = \alpha - \iota = \alpha \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N} \cup \{\iota\}.$$

Wegen ihrer Kantenvielfachheiten bleiben die inhibitor-Kanten ohne Einfluß auf den Zustandsüberführungsvorgang selbst. Die Schaltregel für Petri-Netze mit inhibitor-Kanten ist mit der für gewöhnliche Petri-Netze scheinbar identisch: *Feuert eine aktivierte Transition  $t$  im Zustand  $m$  und ist der Zustand nach dem Schaltvorgang  $\bar{m}$  (formal:  $m \rightarrow^t \bar{m}$ ), dann gilt:*

$$\bar{m}(s) = m(s) + \xi(t, s) - \xi(s, t) \text{ für alle } s \in S,$$

wobei diese Gleichung in den Kategorien unserer „Pseudoarithmetik“ auszuwerten ist. Etwas anderes verbirgt sich jedoch hinter dem Begriff „aktivierte Transition“. Diese Bezeichnung trifft auf eine Transition  $t \in T$  zu, wenn gilt:

$$\forall s \in S: [m(s) - \xi(s, t) \geq 0] \wedge [(\xi(s, t) = \iota) \Rightarrow (m(s) = 0)]$$

Graphisch gesehen sind Überlappungen beider Kantenarten möglich (vgl. Abb. 3 oben), was aber unsere Definition ausschließt. Möglich dagegen ist eine andere Konstellation (vgl. Abb. 3 unten). Hier gilt  $\xi(t, s) > 0 \wedge \xi(s, t) = \iota$  für die Stelle  $s$  und Transition  $t \in T$ . Wir sprechen von einer selbstblockierenden (auch rückgekoppelten) inhibitor-Transition. (Stellen und Transitionen, die mit einer inhibitor-Kante assoziiert sind nennen wir entsprechend inhibitor-Stellen, bzw. inhibitor-Transitionen.)

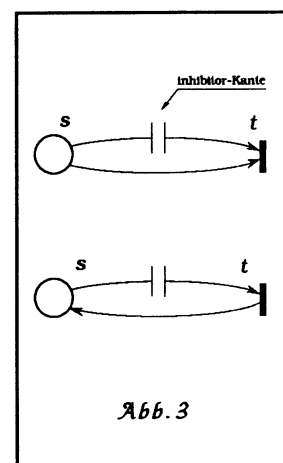


Abb. 3

Einer Präzisierung bedarf noch der Begriff „kontrollierende Stellen“. Unter einer kontrollierenden Stelle im Petri-Netz mit inhibitor-Kanten verstehen wir ein  $s \in S$  mit  $\xi(t, s) > 0 \wedge [\xi(s, t) > 0 \vee \xi(s, t) = 1]$  für eine Transition  $t \in T$ , d.h. eine Ein- und gleichzeitig Ausgangsstelle für  $t$  hinsichtlich der erweiterten Kantenabbildung. Enthält ein Petri-Netz mit inhibitor-Kanten solche Stellen nicht, dann gilt  $(PN^*)$  hinsichtlich dieser Kantenabbildung:

$$(PN^*) \quad \forall s \in S, t \in T: \xi(s, t) = 0 \vee \xi(t, s) = 0.$$

Selbstverständlich können auch die Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme in diesem Sinne verallgemeinert werden. Da wir jedoch unsere Betrachtungen hauptsächlich auf die sehr anschaulichen Petri-Netze beziehen, wollen wir dieses Konzept nur in verkürzter Form vorstellen in der Hoffnung, daß unsere Definition hinreichend selbsterklärend ist (vgl. auch die Ausführungen zum Beispiel, Abb. 4).

**Definition 2.6.** Ein Vektor-Ersetzungssystem mit inhibitor-Vektoren zum Anfangsvektor  $m_0 \in \mathbb{N}^n$  ist die Menge:

$$\mathcal{V} = \{v_j = (t_j^i, t_j^o) \in (\mathbb{N} \cup \{1\})^n \times \mathbb{Z}^n \mid 1 \leq j \leq l, t_j^i + t_j^o \geq 0\}.$$

Die Definition 2.5 läßt Überlappungen beider Kantenarten (vgl. Abb. 3 oben) nicht zu. Deshalb muß unbedingt gefordert werden:

$$(IV) \quad \forall v \in \mathcal{V}, j \in \{1, \dots, n\}: (t_j^i = 1) \Rightarrow (t_j^o = 0).$$

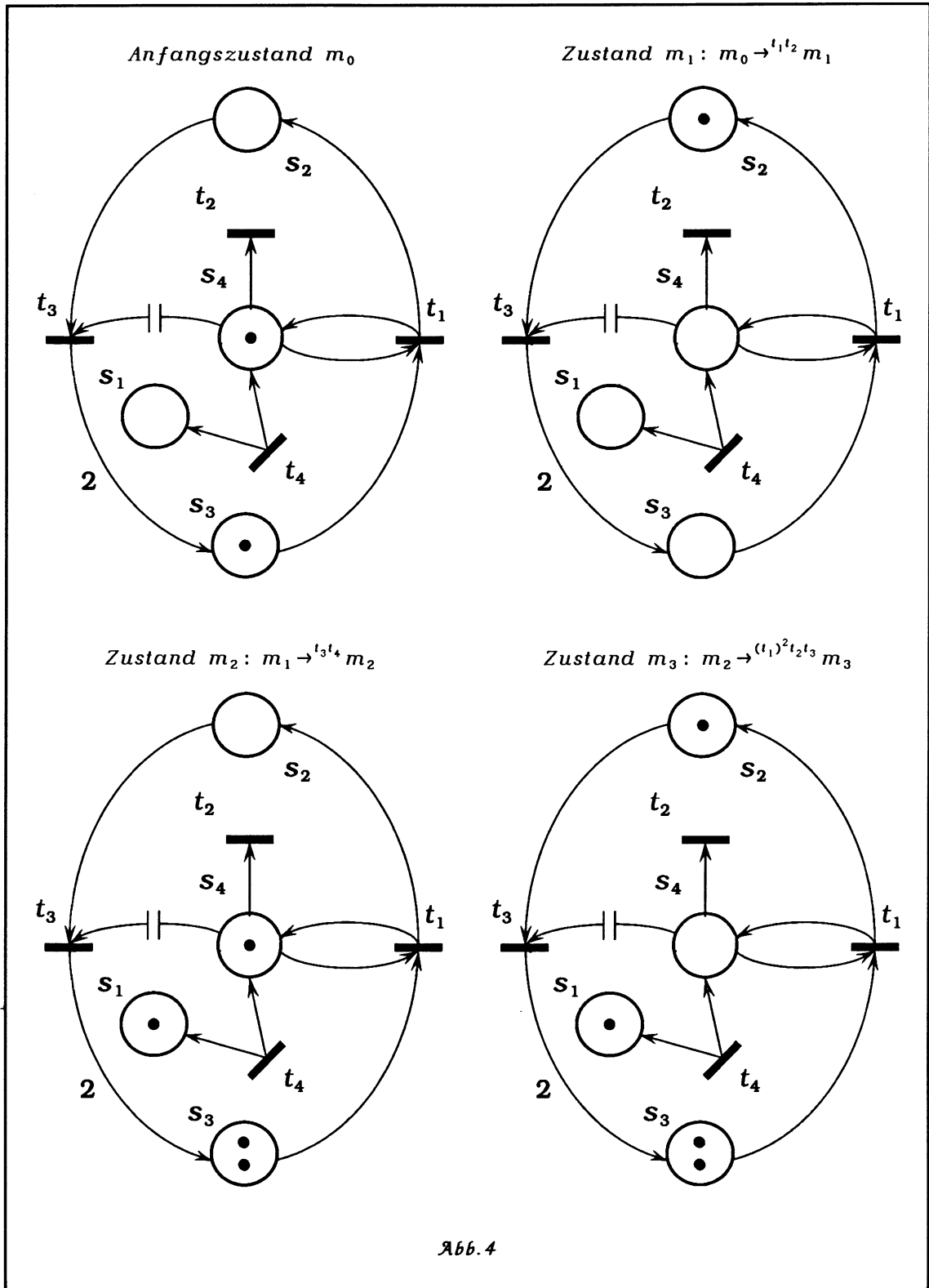
**Definition 2.7.** Ein Vektor-Additionssystem mit inhibitor-Vektoren zum Anfangsvektor  $m_0 \in \mathbb{N}^n$  ist die Menge:

$$\mathcal{U} = \{v_j \in (\mathbb{Z} \cup \{1\})^n \mid 1 \leq j \leq l\}.$$

Die Äquivalenz vom Petri-Netz mit inhibitor-Kanten zu einem Vektor-Additionssystem mit inhibitor-Vektoren liegt nur dann vor, wenn die Eigenschaft  $(PN^*)$  hinsichtlich der erweiterten Kantenabbildung erfüllt ist. Gleiches gilt für Vektor-Ersetzungssysteme mit inhibitor-Vektoren, wenn sie der entsprechend modifizierten Forderung (VAS) genügen.

In der vorliegenden Arbeit blicken wir nur sporadisch auf Petri-Netze mit mehreren inhibitor-Kanten. Da bereits zwei inhibitor-Kanten die Simulation von Turing-Maschinen ermöglichen (Zählerautomaten, vgl. §6), können weitere solche Kanten die Leistungsfähigkeit der Petri-Netze ohnehin nicht mehr entscheidend steigern. Außerdem ist das Erreichbarkeitsproblem in diesem Fall als unentscheidbar bekannt. Unsere Aufmerksamkeit gilt daher primär den Petri-Netzen mit genau einer inhibitor-Kante, die das bislang offene Erreichbarkeitsproblem aufwerfen.

S2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE



Zum Schluß dieses Kapitels geben wir ein Beispiel für ein Petri-Netz mit einer inhibitor-Kante (vgl. Abb. 4), wobei die Parallelitäten zum vorangegangenen Beispiel unübersehbar sein dürften. Wir sagen, daß beide Petri-Netze einander simulieren (im später zu präzisierenden Sinne). Zwar stimmen deren Dimensionen nicht überein. Betrachten wir aber erneut die (zulässige) Schaltfolge  $t_1 t_2 t_3 t_4 (t_1)^2 t_2 t_3$ , so stellen wir fest, daß die durch diese Schaltfolge erzeugten Schaltpfade<sup>9</sup> identisch sind, bezüglich  $s_1, s_2, s_3$ . Wir sprechen von der Projektion der „getroffenen“ Punkte aus  $\mathbb{N}^n$  auf diese drei Stellen.

Die erweiterte Kantenabbildung ist dem Graphen zu entnehmen, was wir dem Leser überlassen möchten. Stattdessen wollen wir das zu unserem Petri-Netz äquivalente Vektor-Ersetzungssystem (mit genau einem inhibitor-Vektor) vollständig angeben:

$$v_1 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]; \quad v_2 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right];$$

$$v_3 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]; \quad v_4 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right];$$

Offensichtlich können die Vektoren  $v_2, v_3, v_4$  auch in den Kategorien der Vektor-Additionssysteme mit inhibitor-Vektoren definiert werden:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Die bereits vorgestellten Konzepte, wie z.B. Erreichbarkeitsmengen und die darauf zurückgehenden Schlüsselprobleme, sind identisch zu formulieren. Zu beachten ist nur, daß

<sup>9</sup> Zur Erinnerung: unter einem Schaltpfad verstehen wir die Folge der Punkte aus dem  $n$ -dimensionalen Gitter  $\mathbb{N}^n$ , die beim Feuern einer Schaltfolge (bestimmt durch eine Transitionenfolge) nacheinander "getroffen" werden.

## §2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE

*etwas anderes unter aktivierten Transitionen, bzw. zulässigen Transitionenfolgen zu verstehen ist. Im vorangegangenen Kapitel haben wir bereits angedeutet, daß inhibitor-Kanten diese Probleme erheblich erschweren können. Die Tatsache, daß zwei und mehr solche Kanten das Erreichbarkeitsproblem unentscheidbar machen [7], ist ein Indiz dafür, daß die inhibitor-Kanten eine echte, qualitative Verallgemeinerung der gewöhnlichen Petri-Netze darstellen. Spätestens bei der Diskussion der Leistungsfähigkeit verschiedener Petri-Netz-Varianten (§6) werden wir uns davon überzeugen können.*

---

**S2. GRUNDLEGENDE KONZEPTE**

---

### §3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

Eine weitere Variante der (nicht notwendigerweise gewöhnlichen) Petri-Netze wird unsere Betrachtungen in diesem Paragraphen wesentlich erleichtern. Es handelt sich um Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen.<sup>1</sup>

**Definition 3.1.** Ein Petri-Netz mit (endlich vielen) kontrollierenden Zuständen ist ein Tupel  $\mathcal{P}^{1,Q} = (S, T, Q, \xi)$  mit folgenden Komponenten und Eigenschaften:

- (QN1)  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  ist eine endliche Menge von Stellen;
- (QN2)  $T = \{t_1, \dots, t_l\}$  ist eine endliche Menge von Transitionen;
- (QN3)  $Q = \{q_1, \dots, q_d\}$  ist eine endliche Menge von kontrollierenden Zuständen;
- (QN4)  $S \cap T = S \cap Q = T \cap Q = \emptyset$ ;
- (QN5)  $\xi: (S \times T) \cup (T \times S) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{1\}$  ist die erweiterte Kantenabbildung;
- (QN6)  $q^a: T \rightarrow Q$ ,  $q^e: T \rightarrow Q$  sind zwei Zustandsabbildungen, die allen Transitionen entsprechend einen Anfangs- und Endzustand zuordnen.

Gilt  $\xi^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ , dann sprechen wir von einem gewöhnlichen Petri-Netz mit kontrollierenden Zuständen. Ferner kann (PN\*) gelten. Die Markierung beinhaltet neben der üblichen Stellenmarkierung stets den augenblicklich vorliegenden kontrollierenden Zustand. Wir sprechen von einer Multimarkierung:

$$(QN7) \quad \vec{m} = (m(s), m(q)): S \cup \{q\} \rightarrow \mathbb{N} \cup Q \text{ mit } m(q) \in Q, m(s) \in \mathbb{N} \text{ für alle } s \in S.$$

Eine Transition  $t \in T$  ist nur dann aktiviert, wenn ihr Anfangszustand  $q^a(t)$  mit dem kontrollierenden Zustand  $m(q)$  übereinstimmt:

$$\forall s \in S: [m(s) - \xi(s, t) \geq 0] \wedge [(\xi(s, t) = 1) \Rightarrow (m(s) = 0)] \wedge [m(q) = q^a(t)].$$

Schaltregel für Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen: Feuert eine aktivierte Transition  $t$  im Zustand  $\vec{m}$  und ist der Zustand nach dem Schaltvorgang  $\vec{m}'$  (formal:  $\vec{m} \rightarrow^t \vec{m}'$ ), dann gilt:

$$\begin{aligned} m'(s) &= m(s) + \xi(t, s) - \xi(s, t) \text{ für alle } s \in S, \\ m'(q) &= q^e(t). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Kontrollierende Zustände wurden in [10] im Zusammenhang mit gewöhnlichen Vektor-Additionssystemen eingeführt. Unsere Definition verallgemeinert dieses Konzept ein wenig.

Zulässige Schaltfolgen, Erreichbarkeitsmengen und weitere Grundkonzepte sind dem §2 unter Berücksichtigung obiger Schaltregel zu entnehmen. Dabei ist zu beachten, daß Schaltpfade, bzw. Erreichbarkeitsmengen lauter Punkte aus dem Multigitter  $N^n \times Q$  enthalten.

Auch hier unterstützen wir unsere Definition durch ein Beispiel. Die Abb.5 zeigt ein gewöhnliches Petri-Netz mit zwei kontrollierenden Zuständen  $q_1, q_2$  (den augenblicklich vorliegenden kontrollierenden Zustand markiert die doppelt eingekreiste Stelle  $q$ ) und drei Stellen, wobei sofort auffällt, daß dieses Netz - im Gegensatz zu den bislang vorgestellten - nicht zusammenhängend ist. Die Transition  $t_2$  z.B. ist völlig isoliert (eine reine Zustandsüberföhrungstransition). Sie kann jedoch wegen  $q_1 \rightarrow q_2$  nicht völlig unabhängig vom übrigen Netz feuern. Die graphisch gesehen fehlenden Kanten sind wegen der Transitionbeschriftungen *de facto* existent.

Die bereits hinlänglich bekannte Schaltfolge  $t_1 t_2 t_3 t_4 (t_1)^2 t_2 t_3$  erzeugt wieder den gleichen Schaltpfad, wenn wir diesen bei den vorangegangenen Beispielen auf die ersten drei Stellen projizieren.<sup>2</sup> In der Tat werden wir uns im diesem Paragraphen davon überzeugen können, daß kontrollierende Zustände - im Gegensatz zu den inhibitor-Kanten - keine qualitative Verallgemeinerung des Grundmodells darstellen. Diese Verallgemeinerung ist allenfalls quantitativ, bezogen auf die Dimension  $n = |S|$ .

Die formalen Definitionen der Vektor-Additions- und Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen beinhalten Transitionenbeschriftungen - sind aber ansonsten mit den aus dem vorherigen Paragraphen identisch, weshalb wir diese Definitionen dem Leser überlassen. Genügen möge an dieser Stelle die Angabe des Vektor-Additionssystems für unser Petri-Netz, das (PN\*) offensichtlich genügt.

$$v_1 = \left[ (q_1 \rightarrow q_1), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]; \quad v_2 = \left[ (q_1 \rightarrow q_2), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right];$$

$$v_3 = \left[ (q_2 \rightarrow q_2), \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]; \quad v_4 = \left[ (q_2 \rightarrow q_1), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right];$$

Bei der Diskussion der bisherigen Beispiele sprachen wir bereits von Projektionen der Erreichbarkeitsmengen, bzw. Schaltpfade auf Stellen, sowie von Simulationen verschiedener Varianten der Petri-Netze. Die nachfolgenden Überlegungen sollen diese Begriffe etwas präzisieren.

---

<sup>2</sup> vgl. die nachfolgende Definition 3.2

§3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

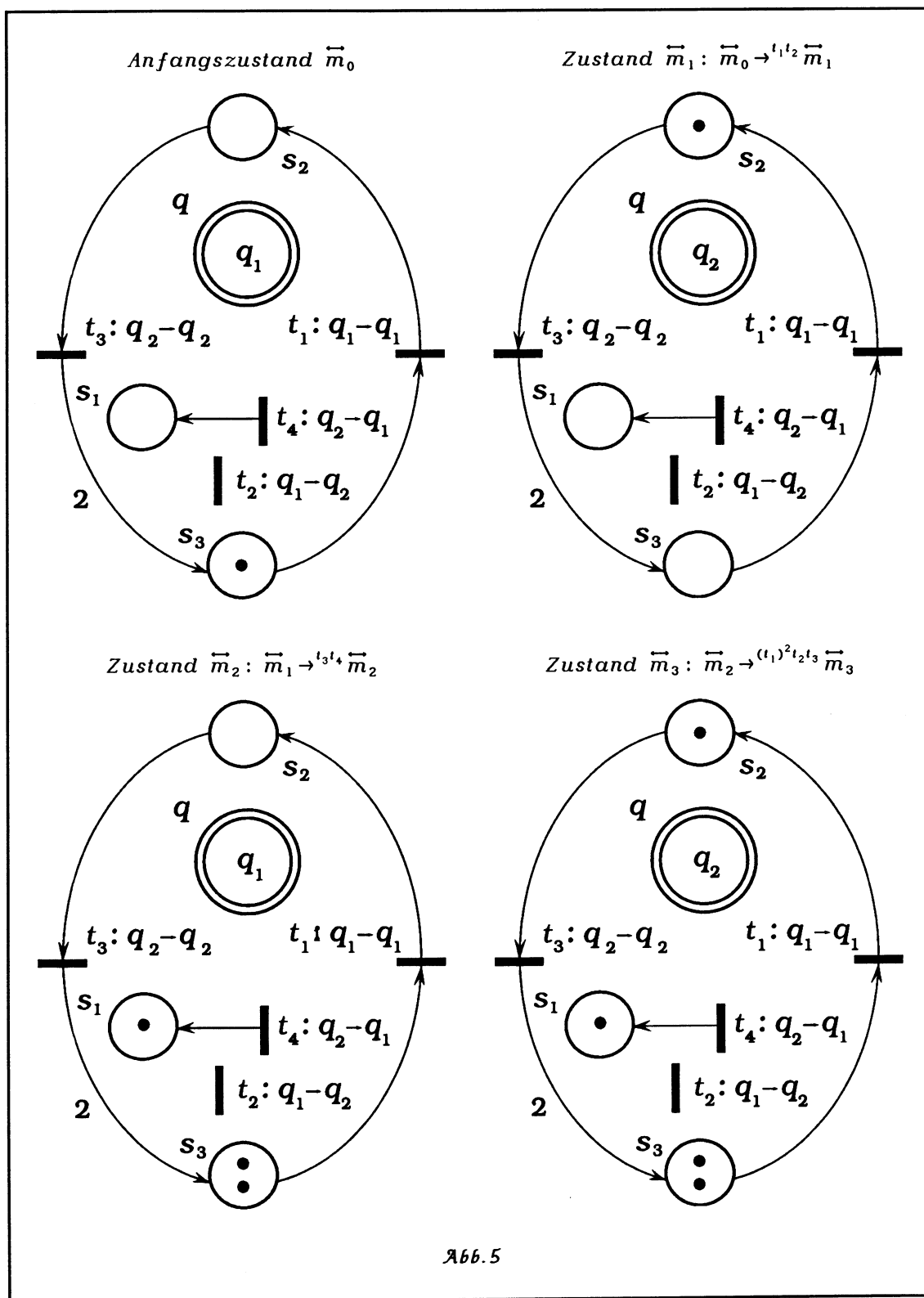


Abb. 5

**Definition 3.2.** *Unter einer Projektion der Erreichbarkeitsmenge  $\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0)$  ( $\bar{M}_0 \subseteq \mathbb{N}^n \times Q$ ) eines Petri-Netzes  $\mathcal{P}^{1,0}$  auf ein Gitter  $G = \mathbb{N}^m \times Q^k$  mit  $m \leq n$  und  $k \in \{0, 1\}$  verstehen wir die Menge:*

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) \downarrow_{\{x_1, \dots, x_m, q\}} = \{\bar{x} \in G \mid \exists \bar{x}' \in \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) : (x'_1, \dots, x'_m, q) = (x_1, \dots, x_m, q)\}$$

oder  $\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) \downarrow_{\{x_1, \dots, x_m\}} = \{\bar{x} \in G \mid \exists \bar{x}' \in \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) : (x'_1, \dots, x'_m) = (x_1, \dots, x_m)\}.$

Die Projektion vom Schaltpfad  $\{\alpha_v\}_{1 \leq v \leq k} \in \mathbb{N}^n \times Q$  ist dann analog zu verstehen.

Naturgemäß unpräzise und daher prinzipiell undefinierbar ist die Bezeichnung „Simulation“. Man könnte von gegenseitiger Simulation zweier Petri-Netze sprechen, wenn deren Erreichbarkeitsmengen gleich wären, was allerdings nur dann vorliegen könnte, wenn beide in ihren Dimensionen übereinstimmen würden. Diese, sagen wir starke Simulation, wird aber nur selten von praktischer Bedeutung sein. Viel wichtiger für unsere Betrachtungen ist die etwas „abgeschwächte“ Simulation, die sich lediglich auf gewisse Projektionen von Erreichbarkeitsmengen bzw. Schaltpfade bezieht, wie wir bereits bei unseren Beispielen Abb. 2, Abb. 4 beobachten konnten. Wir verwenden daher diesen Begriff stets mit der dazugehörigen Spezifikation der Projektionen.

Die nachfolgenden Lemmata belegen, daß kontrollierende Zustände lediglich eine quantitative Verallgemeinerung des Grundmodells darstellen, wobei sich diese Quantität auf die Dimension  $n = |S|$  bezieht. Zunächst zeigen wir, daß diese Aussage auf kontrollierende Stellen in Petri-Netzen mit kontrollierenden Zuständen zutrifft - und das ohne Bezug auf die Dimension.

**Lemma 3.1.** Jedes Petri-Netz  $\mathcal{P}^{1,0}$  kann simuliert werden durch ein gleichdimensionales Petri-Netz  $\mathcal{R}^{1,0}$  mit zusätzlichen kontrollierenden Zuständen, sodaß (PN\*) erfüllt ist. Es gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{R}}(\bar{M}_0) \downarrow_{q=q} = \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) \downarrow_{q=q}, \text{ für alle } q_j \in Q_{\mathcal{P}}, \bar{M}_0 \subseteq \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}.^3$$

**Beweis:** Wir setzen  $Q_{\mathcal{R}} = Q_{\mathcal{P}} \cup Q^{(z)}$  mit  $|Q^{(z)}| = |T_{\mathcal{P}}|$  und modifizieren die Transitionenmenge, indem wir jede Transition  $t_j \in T_{\mathcal{P}}$  durch zwei Transitionen  $t_j^-: q^a(t) \rightarrow q_j^{(z)}$ ;  $t_j^+: q_j^{(z)} \rightarrow q^e(t)$  ersetzen, wobei für die Kantenabbildung gilt:

$$k_{\mathcal{R}}(s, t_j^-) = k_{\mathcal{P}}(s, t_j); \quad k_{\mathcal{R}}(t_j^-, s) = 0,$$

$$k_{\mathcal{R}}(t_j^+, s) = k_{\mathcal{P}}(t_j, s); \quad k_{\mathcal{R}}(s, t_j^+) = 0.$$

<sup>3</sup> Die hier verwendete Notation bedeutet auch eine Art Projektion - ist jedoch, im Gegensatz zur Definition 3.2, folgendermaßen zu verstehen:

$A|_{\rho} = \{\alpha \in A \mid \alpha \text{ genügt } \rho\}.$

## §3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

Aus dieser Konstruktion folgt sofort (PN\*). Es gilt

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\vec{M}_0) |_{q=q_j} \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{R}}(\vec{M}_0) |_{q=q_j},$$

wegen  $\vec{m} \xrightarrow{t_j} \vec{m}'$ ;  $\vec{m} \xrightarrow{t_j^*} \vec{m}'$  für alle  $j \in \{1, \dots, l\}$ ,  $\vec{m} \in \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$  und offensichtlich auch

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\vec{M}_0) |_{q=q_j} \supseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{U}}(\vec{M}_0) |_{q=q_j},$$

weil ja alle zulässigen Schaltpfade des  $\mathfrak{R}^{1,0}$  zwischen beliebigen Punkten  $\vec{m}$  und  $\vec{m}'$  aus  $\mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$  auf Schaltfolgen von der Form  $(t_{j(1)}^- t_{j(1)}^+ \dots (t_{j(v)}^- t_{j(v)}^+))$  zurückgehen.  $\square$

Demnach ist die Unterscheidung zwischen Vektor-Additionssystemen und Vektor-Ersetzungssystemen (mit kontrollierenden Zuständen) auch bei dimensionsbezogenen Überlegungen nicht zwingend erforderlich. Die Eigenschaft (PN\*) kann verhältnismäßig einfach hergestellt werden, wenn wir zusätzliche kontrollierende Zustände in Kauf nehmen. Anders sieht es aus, wenn wir diese Zustände auch noch simulieren wollen. Es ist zwar immer möglich, aber nur unter Zuhilfenahme zusätzlicher Stellen.

**Lemma 3.2.** Jedes Petri-Netz  $\mathcal{P}^{1,0}$  mit kontrollierenden Zuständen kann simuliert werden durch ein Petri-Netz  $\mathcal{R}$  (ohne kontrollierende Zustände) mit Hilfe von zwei zusätzlichen Stellen  $s_1^{(z)}, s_2^{(z)}$ , wobei diese kontrollierend sind für alle  $t \in T_{\mathcal{R}}$ . Für  $Q_{\mathcal{P}} = \{q_1, \dots, q_d\}$  gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\vec{M}_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}} = \mathfrak{R}_{\mathcal{R}}(M_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}}$$

für alle Anfangsmengen  $\vec{M}_0 \subseteq \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$  und  $M_0 \subseteq \mathbb{N}^{n+2}$  mit:

$$(m(s_1), \dots, m(s_n), q_j) \in \vec{M}_0 \Leftrightarrow (m(s_1), \dots, m(s_n), j, d-j) \in M_0.$$

**Beweis:** Jede Multimarkierung  $\vec{m} = (m(s_1), \dots, m(s_n), q_j) \in \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$  in  $\mathcal{P}$  identifizieren wir mit der üblichen Markierung  $m = (m(s_1), \dots, m(s_n), j, d-j) \in \mathbb{N}^{n+2}$  in  $\mathcal{R}$ . Damit ist jedes  $q_j \in Q_{\mathcal{P}}$  gleichbedeutend mit  $(m(s_1^{(z)}), m(s_2^{(z)})) = (j, d-j)$ . Wir konstruieren die Transitionenmenge  $T_{\mathcal{R}}$  mit  $|T_{\mathcal{R}}| = |T_{\mathcal{P}}|$ , sowie die nachfolgend spezifizierte Kantenabbildung:

$$\kappa_{\mathcal{U}}(t, s) = \begin{cases} d-j : q_j = q^e(t) \text{ falls } s = s_2^{(z)}, \\ j : q_j = q^e(t) \text{ falls } s = s_1^{(z)}, \\ \kappa_{\mathcal{P}}(t, s) \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$\xi_u(s, t) = \begin{cases} d - j : q_j = q^a(t) \text{ falls } s = s_2^{(z)}, \\ j : q_j = q^a(t) \text{ falls } s = s_1^{(z)}, \\ \xi_{\mathcal{P}}(s, t) \text{ sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich kann jeder Schaltvorgang des  $\mathcal{P}$  durch  $\mathcal{R}$  simuliert werden. Es bleibt zu zeigen, daß für alle  $(m(s_1^{(z)}), m(s_2^{(z)})) = (j, d - j)$  nur diejenigen Transitionen aktiviert sein können, für die in  $\mathcal{P}$  galt:  $q^a(t) = q_j$ . Die Stellen  $s_1^{(z)}, s_2^{(z)}$  sind komplementär<sup>4</sup> zueinander und folglich gilt für alle Transitionen  $t$  mit  $q^a(t) \neq q_j$  und für jeden Zustand  $m$  mit  $(m(s_1^{(z)}), m(s_2^{(z)})) = (j, d - j)$ :

$$m(s_1^{(z)}) - \xi(s_1^{(z)}, t) < 0 \text{ oder } m(s_2^{(z)}) - \xi(s_2^{(z)}, t) < 0.$$

Das ergibt  $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}(\vec{M}_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}} \supseteq \mathcal{R}_{\mathcal{R}}(M_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}}$ , also insgesamt unser Lemma.  $\square$

Erinnern wir uns an die Beispiele Abb. 2, Abb. 4 (die Abb. 6 zeigt beide Petri-Netze in ihren Anfangszuständen). Bereits früher stellten wir gewisse Affinitäten bezüglich der Erreichbarkeitsmengen fest und vermuteten beiderseitige Simulation. Jetzt können wir diese Vermutung bestätigen und darüberhinaus genaue Angaben über die implizit gemeinten Projektionen der Erreichbarkeitsmengen machen (es handelt sich um Projektionen auf die ersten drei Stellen im Sinne der Definition 3.1.)

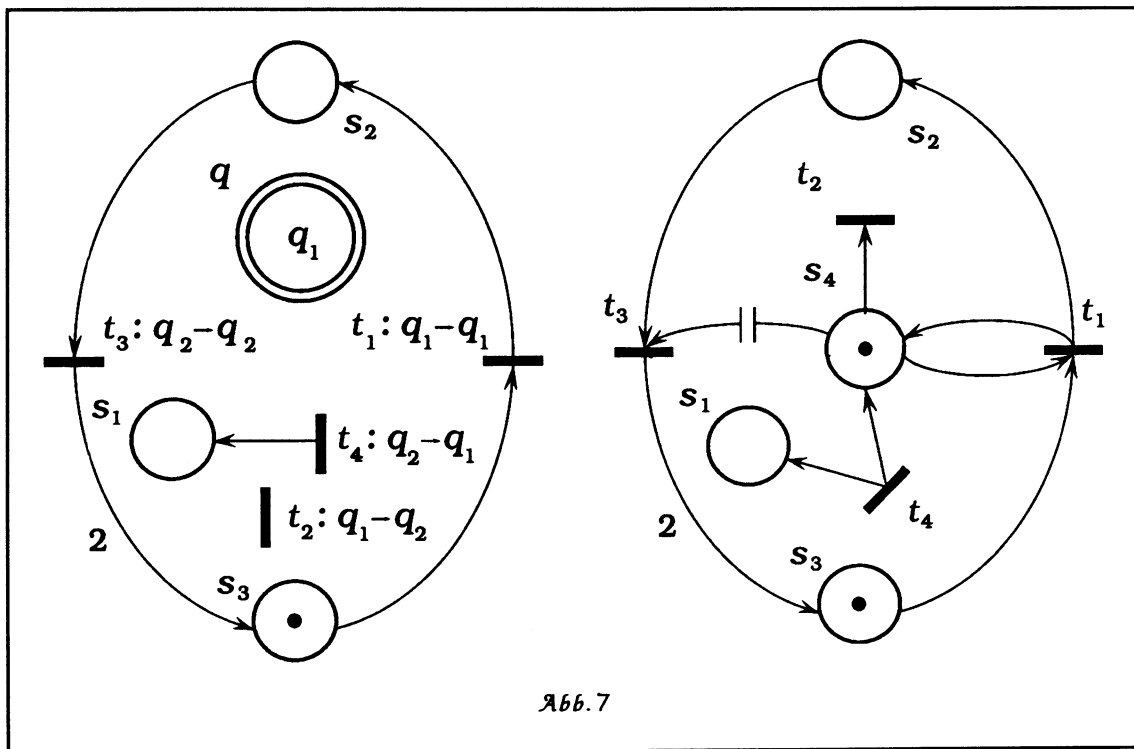
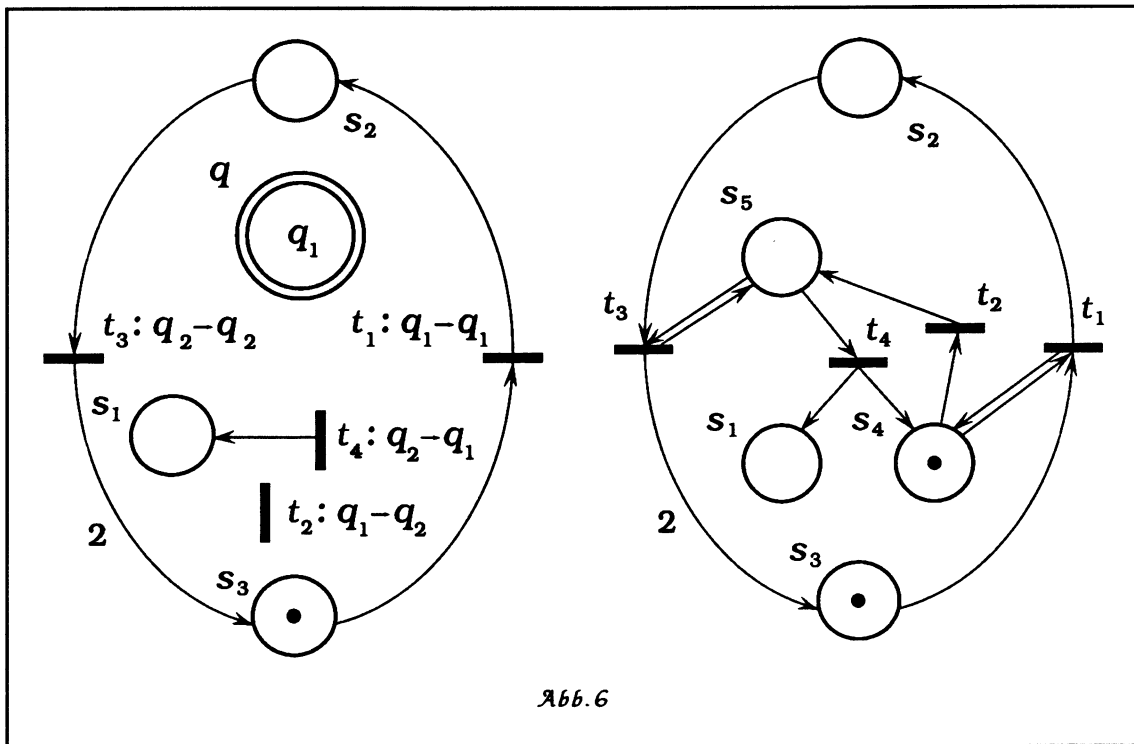
Unübersehbar ist, daß das Petri-Netz (Abb. 6 rechts) nicht strikt nach der Vorschrift aus dem Lemma 3.2 konstruiert ist. Hier ist eine Vereinfachung dahingehend möglich, daß die zwei zusätzlichen Stellen, in unserem Falle  $s_4, s_5$ , nicht alle Transitionen kontrollieren müssen. Eine solche Möglichkeit besteht aber nur dann, wenn lediglich zwei kontrollierende Zustände zu simulieren sind. Wir können dann, wie in unserem Beispiel, diese beiden Zustände entsprechend durch  $(m(s_1^{(z)}), m(s_2^{(z)})) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$  markieren. Im allgemeinen ist jedoch exakt nach der Vorschrift aus unserem Lemma zu verfahren.

Unser Petri-Netz aus dem Beispiel Abb. 5 bringt mit Hilfe nur einer zusätzlichen Stelle (und genau einer inhibitor-Kante) die gleiche Simulation zustande (vgl. Abb. 7 - auf den Beweis wollen wir hier verzichten<sup>5</sup>). Das bedeutet aber nicht, daß bei derartigen Simulationen immer nur eine zusätzliche Stelle erforderlich ist. Die Simulation aus unserem Beispiel ist vielmehr aufgrund der Spezifik des zu simulierenden Petri-Netzes möglich. Im allgemeinen sind zwei zusätzliche Stellen auch dann unbedingt erforderlich, wenn nur zwei kontrollierende Zustände zu simulieren sind - trotz verfügbarer inhibitor-Kante.

<sup>4</sup> vgl. §2, Diskussion des Beispiels Abb. 2.

<sup>5</sup> Der Beweis vom Lemma 4.4 aus §4 belegt implizit diese Simulation.

§3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS



Das Lemma 3.2 ermöglicht eine sehr elegante Simulation der kontrollierenden Zustände. Erweiterungen von Transitionenmengen sind nicht erforderlich und daher sind identische Schaltfolgen zulässig. Gleiches gilt für entsprechend projizierte Schaltpfade. Bei all den Vorzügen hat diese Konstruktion dennoch einen kleinen Schönheitsfehler: die Eigenschaft (PN\*) geht verloren, wo sie doch in dem zu simulierenden Petri-Netz laut Lemma 3.1 praktisch umsonst zu haben ist. Die Frage, die wir uns stellen müssen, ist, ob kontrollierende Zustände mit Hilfe von zusätzlichen Stellen simuliert werden können, die ihrerseits keine Transitionen kontrollieren. Es ist in der Tat möglich. Erforderlich sind drei zusätzliche Stellen, sowie eine erhebliche Erweiterung der Transitionenmenge. Diese Konstruktion, die im wesentlichen auf [10] zurückgeht, studieren wir nun im nachfolgenden Lemma (vgl. auch Anhang A).

**Lemma 3.3.** Jedes Petri-Netz  $\mathcal{P}^{1,0}$  mit kontrollierenden Zuständen kann simuliert werden durch ein Petri-Netz  $\mathcal{R}$  (ohne kontrollierende Zustände) mit Hilfe von drei zusätzlichen Stellen  $s_1^{(z)}, s_2^{(z)}, s_3^{(z)}$ , sodaß (PN\*) erfüllt ist. Für  $Q_{\mathcal{P}} = \{q_1, \dots, q_d\}$  gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(\bar{M}_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}} = \mathfrak{R}_{\mathcal{R}}(M_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}}$$

für alle Anfangsmengen  $\bar{M}_0 \subseteq \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$ ,  $M_0 \subseteq \mathbb{N}^{n+3}$  mit:

$$\begin{aligned} (m(s_1), \dots, m(s_n), q_j) \in \bar{M}_0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (m(s_1), \dots, m(s_n), j, (d+1)(d+1-j), 0) \in M_0. \end{aligned}$$

**Beweis:** Jede Multimarkierung  $\bar{m} = (m(s_1), \dots, m(s_n), q_j) \in \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}}$  in  $\mathcal{P}$  identifizieren wir mit  $m = (m(s_1), \dots, m(s_n), j, (d+1)(d+1-j), 0) \in \mathbb{N}^{n+3}$  in  $\mathcal{R}$ . Damit ist jede Markierung  $(m(s_1^{(z)}), m(s_2^{(z)}), m(s_3^{(z)})) = (j, (d+1)(d+1-j), 0)$  gleichbedeutend mit dem kontrollierenden Zustand  $q_j \in Q_{\mathcal{P}}$ . Das Feuern einer Transition  $t \in T_{\mathcal{R}}$  wird durch drei Transitionen  $t^1, t^2, t^3$  simuliert, wobei nur die letzte die Stellen aus  $S_{\mathcal{P}}$  verändert. Die ersten zwei erzeugen geeignete Markierungen auf den zusätzlichen Stellen, die für die korrekte Simulation sorgen. Sei  $t_k : q_i \rightarrow q_j \in T_{\mathcal{P}}$ . Wir beschreiben die Transitionen  $t_k^1, t_k^2, t_k^3$  in den Kategorien der Vektor-Additionssysteme:

$$v_k^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -i \\ -d(d+1-i) \\ i(d+1) \end{pmatrix}; \quad v_k^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ (d+1)(d+1-i) \\ -(d+1-i) \\ -id \end{pmatrix}; \quad v_k^3 = \begin{pmatrix} * \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ * \\ j - (d+1)(d+1-i) \\ (d+1)(d+1-j) \\ -i \end{pmatrix};$$

## §3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

Daß die Zustandsübergänge korrekt simuliert werden, kann der Leser leicht nachprüfen, denn für eine Transition  $t \in T_\varphi$  mit  $t: q_i \rightarrow q_j$  gilt:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ i \\ (d+1)(d+1-i) \\ 0 \end{pmatrix} + v_k^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ d+1-i \\ i(d+1) \end{pmatrix} + v_k^2 = \\
 & = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ (d+1)(d+1-i) \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + v_k^3 = \begin{pmatrix} * \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ * \\ j \\ (d+1)(d+1-j) \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

wie im unserem Lemma behauptet. Ferner haben wir hier mit lauter nichtnegativen Markierungen zu tun, was die Zulässigkeit dieser Schaltfolgen bestätigt. Zu überlegen bleibt lediglich, ob ein solches Vektor-Additionssystem auch unzulässige Zustandsübergänge simulieren kann. Dazu nehmen wir an, daß der Zustand  $q_i$  vorliegt (was der ersten Markierung in der obigen Abbildung entspricht) und prüfen zunächst, ob eine Transition  $t_k^1$ , die den Zustandsübergang  $q_j \rightarrow q_i$  für ein  $j \neq i$  initialisieren soll, aktiviert sein kann. Für  $j > i$  hieße es aber:

$$m(s_1^{(z)}) = i \rightarrow t_k^1 (i-j) < 0$$

und für  $j < i$  (oder besser  $j \leq i-1$ ):

$$\begin{aligned}
 m(s_2^{(z)}) &= (d+1)(d+1-i) \rightarrow t_k^1 (d+1)(d+1-i) - d(d+1-j) = (d+1)d + \\
 &+ (d+1)(1-i) - (d+1)d + dj = (d+1)(1-i) + dj \leq (d+1)(1-i) - d(1-i) = \\
 &= 1-i \leq 1 \Rightarrow j \leq 0.
 \end{aligned}$$

Gleiches gilt für die Transitionen  $t_k^2$  und  $t_k^3$ , was die gleiche Beweistechnik sofort belegt. Die erste der beiden kann für  $j < i$  sicherlich nicht feuern, wegen:

## §3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

$$m(s_2^{(z)}) = d + 1 - i \rightarrow i^2 d + 1 - i - d - 1 + j < 0.$$

Für  $j > i$  ( $i \leq j - 1$ ) heiße es wiederum:

$$m(s_3^{(z)}) = i(d + 1) \rightarrow i^2 i(d + 1) - jd \leq (j - 1)(d + 1) - jd = j - d - 1 < 0.$$

Aus ähnlichen Gründen wird die Transition  $t_k^3$  für  $j > i$  durch die Stelle  $s_3^{(z)}$ , und für  $j < i$  durch  $s_1^{(z)}$  am Feuern gehindert.  $\square$

Damit ist klar, daß die Eigenschaft (PN\*) keine Qualität für sich ist. Wir können sie in jedem Petri-Netz erreichen, wenn wir drei zusätzliche Stellen spendieren.

**Korollar 3.4.** Jedes Petri-Netz  $\mathcal{P}'$  kann durch ein Petri-Netz  $\mathcal{R}'$  mit drei zusätzlichen Stellen  $s_1^{(z)}, s_2^{(z)}, s_3^{(z)}$  simuliert werden ( $\mathcal{P}'$ ,  $\mathcal{R}'$  - jeweils ohne kontrollierende Zustände). Das simulierende Netz  $\mathcal{R}'$  genügt (PN\*) und für  $d - 1 = |\{(s, t) | s \in S_{\mathcal{P}'}, t \in T_{\mathcal{P}'}, s \text{ kontrollierend für } t\}|$  gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}'}(M_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{R}'}(L_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}} \text{ für alle } M_0 \subseteq \mathbb{N}^n, L_0 \subseteq \mathbb{N}^{n+3} \text{ mit:}$$

$$(m(s_1), \dots, m(s_n)) \in M_0 \Leftrightarrow (m(s_1), \dots, m(s_n), 1, d(d + 1), 0) \in L_0.$$

**Beweis:** Die Eigenschaft (PN\*) erreichen wir nach Lemma 3.1 durch Einführung von  $d$  kontrollierenden Zuständen, die wir dann nach Lemma 3.3 simulieren können.  $\square$

**Korollar 3.5.** Jedes Petri-Netz  $\mathcal{P}'^{\circ}$  kann simuliert werden durch ein Petri-Netz  $\mathcal{R}'$  mit Hilfe von drei zusätzlichen Stellen  $s_1^{(z)}, s_2^{(z)}, s_3^{(z)}$ , sodaß (PN\*) erfüllt ist. Sei

$$d = |\{(s, t) | s \in S_{\mathcal{P}'}, t \in T_{\mathcal{P}'}, s \text{ kontrollierend für } t\}| + |Q_{\mathcal{P}'}|.$$

Es gilt

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}'}(\bar{M}_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}} = \mathfrak{R}_{\mathcal{R}'}(M_0) \downarrow_{\{s_1, \dots, s_n\}}$$

für alle Anfangsmengen  $\bar{M}_0 \subseteq \mathbb{N}^n \times Q_{\mathcal{P}'}$ ,  $M_0 \subseteq \mathbb{N}^{n+3}$  mit:

$$(m(s_1), \dots, m(s_n), q_j) \in \bar{M}_0 \Leftrightarrow (\bar{m}(s_1), \dots, \bar{m}(s_n), j, (d + 1)(d + 1 - j), 0) \in M_0.$$

**Beweis:** Die Lemmata 3.1 und 3.3 transitiv genommen.  $\square$

Aus unseren bisherigen Überlegungen folgt, daß kontrollierende Zustände sowie kontrollierende Stellen nichts an dimensionsunabhängigen Aussagen über Petri-Netze (Vektor-Additionssysteme) ändern. Insbesondere gilt:

**Korollar 3.6.** Das allgemeine Erreichbarkeitsproblem ist für gewöhnliche Petri Netze mit kontrollierenden Zuständen unabhängig von  $(PN^*)$  entscheidbar.  $\square$

Zum Schluß dieses Kapitels wenden wir uns den inhibitor-Kanten im Sinne einer eventuellen Simulation zu. Daß dies nicht immer möglich sein wird, liegt klar auf der Hand - das Erreichbarkeitsproblem wäre sonst entscheidbar. Es lohnt sich dennoch, darüber nachzudenken, ob und wann die inhibitor-Kanten wegsimuliert werden können. Oder anders gefragt: wann können wir im gewöhnlichen Petri-Netz das Feuern von Transitionen vom Leersein bestimmter Stellen abhängig machen? Laut Schaltregel für gewöhnliche Petri-Netze ist es auf den ersten Blick nicht möglich. Stellen wir uns aber eine inhibitor-Stelle  $s$  vor, von der wir wissen, daß sie für ein  $M_0$  (oder auch  $\bar{M}_0$ ) nicht größer werden kann als eine Konstante  $c \in \mathbb{N}$ . Wir könnten dann eine zusätzliche Stelle  $s^{(z)}$  nehmen, diese durch geeignete Anbindung komplementär zu der inhibitor-Stelle machen und die inhibitor-Transition nur bei  $m(s^{(z)}) = c$  feuern lassen. Die inhibitor-Kante selbst wäre dann überflüssig. Gleiches könnte man mit allen inhibitor-Kanten machen - vorausgesetzt, daß die Projektionen der Erreichbarkeitsmengen auf sämtliche inhibitor-Stellen endlich sind. Eine etwas effizientere Konstruktion beschreiben wir im nachfolgenden Korollar.

**Korollar 3.7.** Sei  $S^{(e)} \subseteq S$  mit  $\mathfrak{R}_P(\cdot) \downarrow_{\{s\}} \subseteq \{0, \dots, c\}$  für ein  $c \in \mathbb{N}$  und alle  $s \in S^{(e)}$  in einem Petri-Netz  $\mathcal{P}^{1,0}$ . Im Sinne der Projektion auf die Stellen aus  $S \setminus S^{(e)}$  kann  $\mathcal{P}^{1,0}$  durch ein Petri-Netz  $\mathcal{R}^1$  der Dimension  $n = |S \setminus S^{(e)}| + 2$  simuliert werden. Soll darüberhinaus  $(PN^*)$  gelten, dann beträgt die Dimension des  $\mathcal{R}^1$ :  $n = |S \setminus S^{(e)}| + 3$ . (Dabei entfallen zwangsläufig sämtliche Kanten, die mit den Stellen aus  $S^{(e)}$  assoziiert waren).

**Beweis:** Wir streichen sämtliche Stellen aus  $S^{(e)}$  und erweitern die Menge der kontrollierenden Zustände (falls überhaupt vorhanden) durch Hinzufügen von

$$Q = \{q_\mu \mid \mu \in \mathfrak{R}_P(\cdot) \downarrow_{\{S^{(e)}\}}\} \text{ mit } |Q_{\mathcal{R}}| = |Q_{\mathcal{P}}| + \prod_{s \in S^{(e)}} |\mathfrak{R}_P(\cdot) \downarrow_{\{s\}}|.$$

Durch geeignete Transitionenbeschriftungen  $q_\mu \rightarrow q_\nu$  sorgen wir für Zustandsveränderungen, die die Transitionen aus  $T_{\mathcal{P}}$  verursachen würden. Schließlich simulieren wir die kontrollierenden Zustände aus  $Q_{\mathcal{R}}$  (notfalls auch kontrollierende Stellen), dem Lemma 3.2 bzw. 3.3 folgend.  $\square$

§3. SIMULATION VON VARIANTEN DES GRUNDMODELLS

---

## §4. SEMILINEARE ERREICHBARKEITSMENGEN

*Zu den zentralen Motiven dieser Arbeit gehört die Charakterisierung der Petri-Netz-Erreichbarkeitsmengen unter dem Blickwinkel der Semilinearität. Semilineare Erreichbarkeitsmengen sind von verhältnismäßig einfacher Struktur und machen die ansonsten unentscheidbaren Probleme entscheidbar. Es ist (algorithmisch) möglich, solche Mengen zu beschreiben und folglich auch z.B. Inklusionsfragen der Erreichbarkeitsmengen auf algorithmischem Wege zu beantworten.*

*Das Konzept der Semilinearität geht im wesentlichen auf die sog. Presburger Arithmetik zurück [22], wo der interessierte Leser weitere Informationen findet. Für unsere Betrachtungen reicht eine punktuelle Vorstellung dieser Theorie, die wir in den nachfolgenden Überlegungen geben wollen.*

**Definition 4.1.** *Unter einer linearen Menge zur Basis  $b \in \mathbb{N}^n$  mit der Periodenmenge  $\{p_1, \dots, p_l\} = P \subseteq \mathbb{N}^n$ ,  $|P| < \infty$  verstehen wir die durch die Linearkomponente  $L(\cdot, \cdot)$  erzeugte Menge  $L \subseteq \mathbb{N}^n$  mit:*

$$L = L(b, P) = \left\{ x \in \mathbb{N}^n \mid \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_k \in P : x = b + \sum_{j=1}^k \alpha_j p_j \right\}.^1$$

*Häufig operieren wir mit endlichen Vereinigungen solcher Mengen zu verschiedenen Basen. Wir sprechen von einer linearen Menge zu einer (endlichen) Basismenge  $B \subseteq \mathbb{N}^n$  mit den Perioden  $\{p_1, \dots, p_l\} = P \subseteq \mathbb{N}^n$ ,  $|B||P| < \infty$ :*

$$L = L(B, P) = \bigcup_{b \in B} L(b, P).$$

**Definition 4.2.** *Jede endliche Vereinigung von linearen Mengen nennen wir eine semilineare Menge. Unter  $\text{sem}(\mathbb{N}^n)$  verstehen wir das Mengensystem, bestehend aus allen semilinearen Teilmengen von  $\mathbb{N}^n$ .*

---

<sup>1</sup> Wegen der Simulierbarkeit der kontrollierenden Zustände (siehe §3) verzichten wir auf die Diskussion der Semilinearität in Multigittern  $\mathbb{N}^n \times Q$ . Die Verallgemeinerung der hier vorgestellten Resultate auf Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen wird dem Leser die folgende Definition erleichtern: seien  $b, P$  wie in der Definition 4.1, sowie  $Z \subseteq \{1, \dots, |Q|\}$ . Unter einer linearen Menge  $\tilde{L} \subseteq \mathbb{N}^n \times Q$  verstehen wir die Menge:

$$\tilde{L} = L(b, P, Z) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{N}^n \times Q \mid \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}, z \in Z, p_1, \dots, p_k \in P : \vec{x} = \left( \left[ b + \sum_{j=1}^k \alpha_j p_j \right], q_z \right) \right\}.$$

*Semilinearität ist invariant unter Vereinigung, Durchschnitt, Komplementbildung, Translation und - was sehr wichtig ist für unsere Überlegungen - auch unter Projektion auf semilineare Mengen. Diese Eigenschaften können leicht bewiesen werden für lineare Mengen und gelten dann automatisch für deren endliche Vereinigungen [10],[22]. Darüberhinaus gilt:*

**Lemma 4.1.** Sei  $l$  ein eindimensionales Teilgitter aus  $N^n$ . Für jede Folge  $\{L(x_j, P_j)\}$  mit  $L(x_j, P_j) \subseteq l$ ,  $P_j \subseteq P_{j+1}$  für alle  $j \in N$  und  $P_\nu \neq \emptyset$  für ein  $\nu \in N$  gilt:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} L(x_j, P_j) = \bigcup_{j=1}^k L(x_j, P_j) \text{ für ein } k \in N.$$

**Beweis:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an:  $l = L(0, \{1\})$ . Sei  $p_\nu \in P_\nu$ . Es gibt endlich viele Äquivalenzklassen modulo  $p_\nu$  in  $l$  und es gilt  $p_\nu \in P_j$  für alle  $j \geq \nu$ . Daher muß jedes  $x \geq x_\nu$  aus der gleichen Äquivalenzklasse in  $L(x_\nu, P_\nu)$  enthalten sein. Es gibt aber nur endlich viele Äquivalenzklassen und endlich viele  $x < x_\nu$  in der gleichen Klasse. Es kann also nur endlich viele  $j$  geben mit:

$$x \in \left( L(x_j, P_j) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} L(x_k, P_k) \right). \quad \square$$

**Lemma 4.2.** Für alle  $b \in N^n$  und alle Periodenmengen  $P \subseteq N^n$ ,  $|P| < \infty$  existiert ein  $n$ -dimensionales, gewöhnliches Vektor-Additionssystem  $\mathcal{U}$  mit der Eigenschaft:  $\mathfrak{R}_{\mathcal{U}}(b) = L(b, P)$ .

**Beweis:** Wir setzen  $\mathcal{U} = \mathcal{P}$ . Zu jedem  $x \in L(b, P)$  existiert eine Linearkombination von Perioden aus  $P$  mit  $x = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_k p_k$ . Da alle Translationsvektoren in  $\mathcal{U}$  schwach-positiv<sup>2</sup> sind, ist jede Transitionenfolge  $\tau \in \mathcal{U}^*$  (im äquivalenten Petri-Netz) zulässig. Folglich erreichen wir jedes  $x \in N^n$  durch  $(v_1)^{\alpha_1} \dots (v_k)^{\alpha_k}$ , was  $\mathfrak{R}_{\mathcal{U}}(b) \supseteq L(b, P)$  impliziert. Auf der anderen Seite kann jedes  $\tau \in \mathcal{U}^*$  so geordnet werden, daß es eine Linearkombination ergibt. Das bedeutet aber  $\mathfrak{R}_{\mathcal{U}}(b) \subseteq L(b, P)$ , also unsere Behauptung.  $\square$

*Für semilineare Mengen ist eine solche Konstruktion vermutlich nur partiell möglich. Eines wollen wir aber unbedingt festhalten - nämlich die (etwas bedingte) Invarianz der Semilinearität unter semilinearen Anfangsmengen:*

**Lemma 4.3.** Sei  $C^n$  die Menge aller  $n$ -dimensionalen Petri-Netze. Es gilt:

<sup>2</sup> d.h. aus lauter nichtnegativen Komponenten bestehend. Siehe auch §7, Definition 7.1.

## §4. SEMILINEARE ERREICHBARKEITSMENGEN

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{P} \in \mathbf{C}^n, m_0 \in \mathbf{N}^n : \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_0) \in \text{sem}(\mathbf{N}^n) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \forall M_0 \in \text{sem}(\mathbf{N}^n) : \mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(M_0) \in \text{sem}(\mathbf{N}^n). \end{aligned}$$

**Beweis:** Da semilineare Mengen endliche Vereinigungen von linearen Mengen sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $M_0$  als linear ansehen, d.h.  $M_0 = L(b, P)$ . Wir beweisen folgende Gleichung:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{P}, T}(L(b, P)) = \mathfrak{R}_{\mathcal{P}, T \cup P}(b).$$

Jeden Punkt  $x \in \mathfrak{R}_{\mathcal{P}, T}(L(b, P))$  (mit  $L(b, P) \xrightarrow{\tau \in T^*} x$ ) können wir von  $b$  aus erreichen, weil es einen Punkt  $y \in L(b, P)$  geben muß mit  $y \xrightarrow{\tau \in T^*} x$ , der durch eine (immer zulässige) Transitionenfolge  $\pi \in P^*$  von  $b$  aus erreicht werden kann. Umgekehrt kann jede zulässige Transitionenfolge  $\zeta \in (T \cup P)^*$  durch entsprechende Permutation auf die Form  $\pi \tau$  gebracht werden, ohne ihre Zulässigkeit zu verlieren. Offensichtlich ist jeder Punkt  $y$  mit  $b \xrightarrow{\pi} y$  in  $L(b, P)$  enthalten.  $\square$

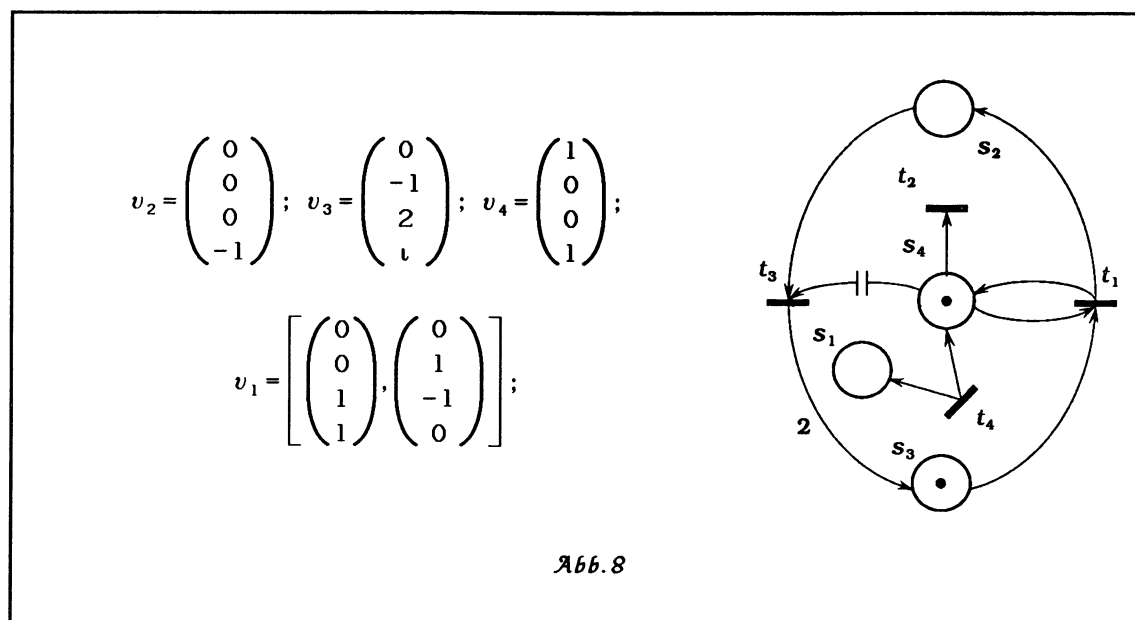
Betrachten wir noch einmal das Beispiel Abb. 1. Hier ist die Erreichbarkeitsmenge von besonders einfacher Struktur, weil sie offensichtlich unter endlichen Anfangsmengen endlich ist (also sogar linear) und semilinear unter semilinearen Anfangsmengen  $M_0 \in \text{sem}(\mathbf{N}^3)$ .<sup>3</sup> Über die Petri-Netze aus den anderen Beispielen können wir das allerdings nicht behaupten. In dem nächsten Lemma studieren wir eine nicht-semilineare Erreichbarkeitsmenge.<sup>4</sup>

**Lemma 4.4.** Die Erreichbarkeitsmengen der (mindestens) vierdimensionalen Vektor-Ersetzungssysteme mit genau einer inhibitor-Kante sind im allgemeinen nicht-semilinear. (Dabei ist stets an semilineare, insbesondere einelementige Anfangsmengen gedacht, wie in unserem Beispiel.)

**Beweis:** Sei  $\mathcal{V}$  das zu dem Petri-Netz aus dem Beispiel Abb. 4 äquivalente Vektor-Ersetzungssystem mit genau einem inhibitor-Vektor und insgesamt vier Vektoren, die je nach Möglichkeit als Additions- bzw. Ersetzungsvektoren folgendermaßen definiert werden können:

<sup>3</sup> Diese Behauptung können wir uns allerdings nur dann leisten, wenn die Erreichbarkeitsmengen der dreidimensionalen Vektor-Additionssysteme stets semilinear sind. Dieses Resultat ist aber aus [25] bekannt - es gilt sogar bis zu der Dimension  $n=5$ . Aussagen dieser Art studieren wir im nächsten Kapitel.

<sup>4</sup> Vorweg: das hier betrachtete Petri-Netz ist ein Potenzierer im Sinne der WPNC-Berechenbarkeit (oder zumindest dessen Kernstück). Vgl. §6, WPNC4.



Als Startmenge wählen wir  $\{m_0\}$  mit:

$$m_0 = (m_0(s_1), m_0(s_2), m_0(s_3), m_0(s_4)) = (0, 0, 1, 1).$$

Diese einelementige Anfangsmenge ist trivialerweise linear. Seien noch:

$$(B1a) \quad 0 < x_2 + x_3 \leq 2^{x_1} \quad (B1b) \quad x_4 > 0$$

$$(B2a) \quad 0 < 2x_2 + x_3 \leq 2^{x_1+1} \quad (B2b) \quad x_4 = 0, \quad \text{ferner sei} \quad (B12) \quad x_4 \leq x_1 + 1.$$

Obige Relationen indizieren eine offensichtlich nicht-semilineare Menge aus  $\mathbb{N}^4$ . Wir zeigen, daß diese Menge alle Punkte aus  $\mathfrak{R}_V(m_0)$  enthält. Genauer: jedes  $x \in \mathbb{N}^4$  ist genau dann erreichbar, wenn entweder (B1a), (B1b) und (B12) oder (B2a), (B2b) und (B12) gelten. Zunächst wenden wir uns dem Teil „ $\Rightarrow$ “ zu, d.h. wir zeigen, daß nur Punkte aus der oben definierten Menge durch  $\mathcal{V}$  erreichbar sind. Die Bedingung (B12) wollen wir vorübergehend außer Acht lassen, weil Punkte, die ihr nicht genügen offensichtlich nicht erreichbar sind. Anfangs gelten (B1a) und (B1b). Den Induktionsschritt belegt die folgende Fallunterscheidung:

- <sup>10)</sup> Es gelten zunächst (B1a) und (B1b), was das Feuern von  $t_3$  unmöglich macht. Beim Feuern von  $t_1$  bleibt  $x_2 + x_3$  unverändert; die  $t_4$  erhöht sogar  $x_1$ , d.h. (B1a) und (B1b) gelten nach wie vor. Gleiches gilt für die Transition  $t_2$ , falls vor dem Feuern  $x_4 > 1$  war. Galt vor dem Feuern  $x_4 = 1$ , so gilt jetzt (B2b) aber offensichtlich auch (B2a).

## 84. SEMILINEARE ERREICHBARKEITSMENGEN

- 20) Es gelten jetzt (B2a) und (B2b). Wegen (B2b) können  $t_1$  und  $t_2$  nicht feuern. Feuert die Transition  $t_3$ , dann ist (B2b) offensichtlich erfüllt und wegen  $2(x_2 - 1) + (x_3 + 2) = 2x_2 + x_3$  auch (B2a). Feuert jedoch  $t_4$ , dann gilt jetzt (B1b), aber wegen  $x_2 + x_3 < 2x_2 + x_3 \leq 2 \cdot 2^{x_1}$  auch (B1a).

Im Teil „ $\Leftarrow$ “ zeigen wir durch vollständige Induktion nach  $x_1$ , daß jeder Punkt aus unserer Menge durch  $\mathcal{V}$  erreicht werden kann.

- (i)  $x_1 = 0$ . Wegen (B12) gilt  $x_4 \leq 1$ . Die einzigen Punkte, die unsere Bedingungen erfüllen sind also:

$x^1 = (0, 0, 1, 1)$ erreichbar durch $\lambda$ .	Es gelten (B1a), (B1b).
$x^2 = (0, 1, 0, 1)$ erreichbar durch $t_1$ .	Es gelten (B1a), (B1b).
$x^3 = (0, 0, 1, 0)$ erreichbar durch $t_2$ .	Es gelten (B2a), (B2b).
$x^4 = (0, 1, 0, 0)$ erreichbar durch $t_1 t_2$ .	Es gelten (B2a), (B2b).
$x^5 = (0, 0, 2, 0)$ erreichbar durch $t_1 t_2 t_3$ .	Es gelten (B2a), (B2b).

- (ii) Die Behauptung gelte für alle Punkte mit  $x_1 \leq \alpha_1 - 1$ .

- (iii) Sei  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  und es gelten (B1a) und (B1b). Darüberhinaus nehmen wir o.B.d.A. an, daß  $\alpha_4 = 1$  ist, weil auch andere  $\alpha_4$ -Werte (die (B12) genügen) offensichtlich durch  $(t_4)^m (t_2)^n$  erreichbar sind. Es gilt also  $0 < \alpha_2 + \alpha_3 \leq 2^{\alpha_1}$ , sowie  $\alpha_4 = 1$  und wir wollen zeigen, daß dieser Punkt tatsächlich erreichbar ist.

Angenommen es gilt  $0 < \alpha_2 + \alpha_3 \leq 2^{\alpha_1 - 1}$ . Nach der Induktionsvoraussetzung ist  $\alpha' = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3, 1)$  erreichbar. Durch  $t_4 t_2$  erreichen wir unser  $\alpha$ .

Gilt  $2^{\alpha_1 - 1} < \alpha_2 + \alpha_3 \leq 2^{\alpha_1}$ , und ist  $\alpha_2 + \alpha_3 = 2^{\alpha_1 - 1} + b$  mit  $0 < b \leq 2^{\alpha_1 - 1}$ , dann gibt es nach der Induktionsvoraussetzung einen Schaltpfad zum  $\alpha' = (\alpha_1 - 1, b, 2^{\alpha_1 - 1} - b, 1)$ , weil  $\alpha'$  (B1a) und (B1b) genügt. Nun, jetzt können wir feuern: durch den Schaltpfad  $t_2 (t_3)^b t_4 (t_1)^{\alpha_2}$  erreichen wir  $(\alpha_1, \alpha_2, 2^{\alpha_1 - 1} + b - \alpha_2, 1)$ , also wieder den gewünschten Punkt, weil ja  $2^{\alpha_1 - 1} + b - \alpha_2 = \alpha_3$  ist.

Aus diesem Resultat folgt bereits unser Lemma, weshalb wir hier auf den Beweis der Erreichbarkeit von Punkten mit  $x_4 = 0$  verzichten wollen. Dieser Beweis kann ähnlich geführt werden.  $\square$

Der Beweis vom Lemma 4.4 belegt implizit die gegenseitige Simulation der Petri-Netze aus den Beispielen Abb. 4 und Abb. 5. Zusammen mit den Erkenntnissen aus dem vorherigen Kapitel erhalten wir:

**Korollar 4.5.** Die Erreichbarkeitsmengen der folgenden Gebilde sind unter einelementigen Anfangsmengen im allgemeinen nicht-semilinear:

- gewöhnliche Vektor-Additionssysteme der Dimension  $n \geq 6$ ;
- gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme der Dimension  $n \geq 5$ ;
- gewöhnliche Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen der Dimension  $n \geq 3$ ;
- Vektor-Ersetzungssysteme mit genau einem inhibitor-Vektor der Dimension  $n \geq 4$ . □

*Wir sehen also, daß nicht-semilineare Erreichbarkeitsmengen bereits bei recht „kleinen“ Petri-Netzen auftreten können. Auf der anderen Seite könnte man die Frage stellen, wie wahrscheinlich die Semilinearität ist. Die exakte Quantifizierung wäre enorm schwierig, aber man kann die heuristische Antwort wagen, daß die Erreichbarkeitsmengen der Petri-Netze doch sehr zur Semilinearität „neigen“. Aus [10] ist z.B. bekannt, daß diese Eigenschaft im etwas eingeschränkten Sinne auf gewöhnliche Petri-Netze mit  $(PN^*)$  (Vektor-Additionssysteme) zutrifft, wenn höchstens zwei Stellen beschränkte Projektionen der Erreichbarkeitsmengen haben, und das unabhängig von der Dimension. Die Überlegungen, die zu dieser Erkenntnis geführt haben, wollen wir hier nicht wiederholen. Das für uns wichtigste Resultat halten wir im nachfolgenden Lemma fest.*

**Lemma 4.6.** Sei  $\mathcal{V}$  ein gewöhnliches Petri-Netz mit  $(PN^*)$  (Vektor-Additionssystem) der Dimension  $n \in \mathbb{N}$ . Für alle Komponentenpaare  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \neq k$  existiert eine (effektiv berechenbare) Konstante  $g^{j,k} = (g_1^{j,k}, \dots, g_n^{j,k}) \in \mathbb{N}^n$  mit  $g_j^{j,k} = g_k^{j,k} = 0$  und  $g_i^{j,k} \in \mathbb{N}$  für  $j \neq i \neq k$ , mit folgender Eigenschaft:

Die Erreichbarkeitsmengen von  $\mathcal{V}$  strikt innerhalb von  $G^{j,k} = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x \geq g^{j,k}\}$  (d.h. auf Schaltpfaden aus  $G^{j,k}$ ), für alle Anfangsmengen  $M_0 \in \text{sem}(G^{j,k})$  können durch semilineare Teilmengen der gesamten Erreichbarkeitsmengen von  $\mathcal{V}$  eingehüllt werden. [10] □

*Mit dem Begriff „Einhüllung“ meinen wir stets die mengentheoretische Überdeckung von kegelförmigen Gebilden, also z.B. linearen oder semilinearen Erreichbarkeitsmengen - im Gegensatz zu Inklusionen, die im anderen Zusammenhang stehen. Ferner ist hier unbedingt zu beachten, daß sich diese Aussage nur auf eine Teilmenge von  $\mathbb{N}^n$  bezieht („strikt innerhalb von  $G^{j,k}$ “). Das gilt sowohl für die Anfangsmengen, als auch für Schaltpfade und folglich auch Erreichbarkeitsmengen. Im nächsten Kapitel arbeiten wir häufig mit derartigen Aussagen.*

*Es ist zwar etwas gewagt, anhand dieser Aussage weitgehende Schlußfolgerungen hinsichtlich Petri-Netz-Erreichbarkeitsmengen und deren allgemeiner Struktur zu ziehen (allenfalls im Zusammenhang mit weiteren Erkenntnissen, was im kommenden Kapitel geschehen soll). Dennoch darf sicherlich vermutet werden, daß dieses Lemma für Konstanten mit drei Komponenten gleich 0 nicht mehr gilt. Drei Stellen könnten dann ein Petri-Netz*

## §4. SEMILINEARE ERREICHBARKEITSMENGEN

*mit kontrollierenden Zuständen simulieren, dessen Erreichbarkeitsmenge bereits bei der Dimension  $n = 3$  nicht-semilinear sein könnte. Die Umkehrung dieser (noch) Vermutung würde aber bedeuten, daß solche Erreichbarkeitsmengen nur dann zu erwarten sind, wenn entsprechend viele Transitionen u.U. am Feuern gehindert werden - sei es durch kontrollierende Zustände, sei es durch Stellen, die nicht beliebig groß werden können. Im nächsten Kapitel werden wir die Bestätigung hierfür ableiten können.*

---

**S4. SEMILINEARE ERREICHBARKEITSMENGEN**

---

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

*Das Korollar 4.5 markiert Dimensionen verschiedener Varianten von Petri-Netzen, in denen die Erreichbarkeitsmengen nicht-semilinear sein können. Die Frage, die wir uns stellen wollen, lautet, ob die Semilinearität obligatorisch ist in hinreichend kleinen Dimensionen. Kann dieser Sachverhalt für eine bestimmte Klasse von Petri-Netzen bis zu einer Dimension  $n^* \in \mathbb{N}$  bewiesen werden und existieren Petri-Netze aus der gleichen Klasse mit  $n = n^* + 1$ , deren Erreichbarkeitsmengen nicht-semilinear sind, so sprechen wir von einer dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenze  $n^* \in \mathbb{N}$  für diese Klasse.*

*Aussagen dieser Art wurden in [10] für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme (auch mit kontrollierenden Zuständen) bewiesen. Wir wollen untersuchen, ob und inwieweit kontrollierende Stellen und Zustände sowie inhibitor-Kanten die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen verschieben, wobei wir uns aus mehrfach genanntem Grund hauptsächlich für Petri-Netze mit genau einer inhibitor-Kante interessieren.*

*Zunächst zitieren wir die beiden Hauptsätze aus [10], die für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme, mit oder ohne kontrollierende Zustände, sowohl dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenzen, als auch die effektive Berechenbarkeit der (semilinearen) Erreichbarkeitsmengen beinhalten.<sup>1</sup>*

**Lemma 5.1.** Die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme mit kontrollierenden Zuständen beträgt  $n^* = 2$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_u(\vec{M}_0) \in \text{sem}(\mathbb{N}^2 \times Q) \text{ für alle } \vec{M}_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^2 \times Q).^2$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar. [10]  $\square$

**Lemma 5.2.** Die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme ohne kontrollierende Zustände beträgt  $n^* = 5$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_u(M_0) \in \text{sem}(\mathbb{N}^5) \text{ für alle } M_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^5).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar. [10]  $\square$

---

<sup>1</sup> Zu den Konsequenzen der Semilinearität gehört, neben der Berechenbarkeit der Erreichbarkeitsmengen, stets u.a. die Entscheidbarkeit des Gleichheits- und Inklusionsproblems der Erreichbarkeitsmengen. Siehe dazu Fachliteratur.

<sup>2</sup> vgl. Fußnote 1, Seite 35.

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

Ausgehend vom Lemma 5.2 beobachten wir, daß kontrollierende Zustände eine gewaltige Verschiebung der Semilinearitätsgrenze verursachen. Erinnern wir uns an Lemma 4.4 und Beispiel Abb. 2, so stellen wir fest, daß kontrollierende Stellen ebenfalls die Semilinearitätsgrenze verschieben (mindestens um 1). Auf der anderen Seite wissen wir aus dem §3, daß kontrollierende Zustände ein stärkeres Mittel sind als kontrollierende Stellen, die sich folglich in dieser Hinsicht nicht stärker auswirken dürften. Es bleibt nur noch die Frage, ob kontrollierende Stellen und Zustände zusammengenommen mehr bewirken können, als exklusiv eingesetzt.

**Lemma 5.3.** Die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen sind für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme - jeweils mit kontrollierenden Zuständen - gleich und betragen  $n^* = 2$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_v(\vec{M}_0) \in \text{sem}(N^2 \times Q) \text{ für alle } \vec{M}_0 \in \text{sem}(N^2 \times Q).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar.

**Beweis:** Wegen Lemma 3.1 ist der in [10] vorgestellte Algorithmus ohne Einschränkungen auf gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen anwendbar.  $\square$

Kontrollierende Stellen bleiben demnach ohne Einfluß auf die Semilinearitätsgrenze der gewöhnlichen Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen. In Anbetracht der Erkenntnisse aus §3 konnte dieses vermutet werden - ist aber eher auf das sehr kleine Multigitter  $N^2 \times Q$  zurückzuführen. In den nachfolgenden Überlegungen wenden wir uns der Frage zu, ob und wieviele inhibitor-Kanten diesen Sachverhalt verändern können. Außerdem versuchen wir die Bedeutung von inhibitor-Transitionen bzw. inhibitor-Stellen in diesem Zusammenhang zu klären.

**Theorem 5.4.** Die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen sind für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme - jeweils mit kontrollierenden Zuständen und genau einer inhibitor-Kante - gleich und betragen  $n^* = 2$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_{p_i}(\vec{M}_0) \in \text{sem}(N^2 \times Q) \text{ für alle } \vec{M}_0 \in \text{sem}(N^2 \times Q).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar.

**Beweis:** Zunächst machen wir einige Vorbereitungen. Unter einer inhibitor-Hyperebene  $\eta^i \subseteq N^n \times Q$  verstehen wir die Menge aller Punkte (Multimarkierungen) aus  $N^n \times Q$ , bei denen die inhibitor-Transition aktiviert ist. Offensichtlich gilt  $\eta^i \in \text{sem}(N^n \times Q)$ . Die Menge  $\text{shift}^i(\vec{M}) = \vec{M} \cup \{\vec{x} \in N^n \times Q \mid \exists \vec{y} \in \vec{M} : \vec{y} \rightarrow^i \vec{x}\}$  für eine Menge  $\vec{M} \subseteq N^n \times Q$  bezeichnen wir als inhibitor-Translation. Sei  $\mathcal{U}^i$  ein Vektor-Additionssystem mit genau einer inhibitor-

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

## ALGORITHMUS A1

```

input ( $\mathcal{U}', \{(x_0, P_0, q_0)\}$ ); /*  $\mathcal{U}'$ -ein zweidimensionales Vektor-Additionssystem mit
    kontrollierenden Zuständen und genau einer inhibitor-
    Kante; das Tupel  $(x_0, P_0, q_0)$  kennzeichnet entsprechend
    die Basis, Periodenmenge und den kontrollierenden Zu-
    stand einer linearen Anfangsmenge  $\tilde{L}_0 = (L(x_0, P_0), q_0) \subseteq
    \subseteq \mathbb{N}^2 \times Q$ . O.B.d.A. nehmen wir an:  $q_0 = q^a(t')$ , d.h.  $\tilde{L}_0 \subseteq \eta'$ .
    */

begin /* Die Grundstruktur ist ein Baum, dessen Knoten jeweils  $\text{set}(\cdot)$ ,  $\text{tag}(\cdot)$ , sowie
    Verweise auf den Vorgänger und den (die) Nachfolger beinhalten. */

1) let  $\text{set}(\text{root}) = \{(x_0, P_0, q^a(t'))\}$ ,  $\text{tag}(\text{root}) = \text{open}$ ; /* root hat keine
    Vorgänger */

2) on pick leaf:  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{open}$ ; /* leaf hat keine Nachfolger */
    if not exists go e; /* alle Pfade geschlossen, Ausgabe */

3) let  $L = [\text{r10}(\text{shift}'(\text{set}(\text{leaf}))) \cap \eta']$ ; /* r10() ist der aus [10] bekannte
    Algorithmus, der hier für  $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \setminus \{t'\}$  aufgerufen wird. */

4) let  $L' = \{(x_j, P_j, q^a(t')) \in L \mid P_j = \emptyset\}$ ,  $L'' = L \setminus L'$ ;

5) for each  $((x_j, \emptyset, q^a(t')) \in L')$  begin

6) create succ; let  $\text{leaf} \xrightarrow{\text{next}} \text{succ}$ ,  $\text{set}(\text{succ}) = (x_j, \emptyset, q^a(t'))$ ;
    /* succ wird direkter Nachfolger von leaf. */

7) if  $\text{set}(\text{leaf}) = (x, \emptyset, q^a(t'))$  &  $\text{set}(\text{succ}) = (y, \emptyset, q^a(t'))$  &  $x < y$ 
    let  $\text{set}(\text{succ}) = (x, \{y - x\}, q^a(t'))$ ;

8) end;

9) if  $L'' \neq \emptyset$  create succ; let  $\text{leaf} \xrightarrow{\text{next}} \text{succ}$ ,  $\text{set}(\text{succ}) = L''$ ;

10) for each (current leaf) begin

11) if  $\text{set}(\text{leaf}) \subseteq \left[ \bigcup_{\text{ancestors}(\text{leaf})} \text{set}(\text{ancestor}) \right]$  let  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{closed}$ 
    else  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{open}$ ;

12) end, go on;

e output ( $E = \bigcup_{\text{nodes}} \text{set}(\text{leaf})$ ); /* nichtdisjunkte Vereinigung */

end;

```

Transition  $t^i$  und der inhibitor-Stelle (o.B.d.A.)  $s_1$ .<sup>3</sup> Mit Hilfe des Algorithmus  $\mathfrak{A}1$  berechnen wir zunächst die Erreichbarkeitsmenge des  $\mathcal{U}^i$  auf der inhibitor-Hyperebene, für eine o.B.d.A. lineare Anfangsmenge  $\vec{L}_0 = \overline{L(x_0, q_0)} = (L(x_0, q_0), q_0) \subseteq N^2 \times Q$ . Dabei können wir natürlich nicht direkt mit unendlichen, wenn auch semilinearen oder gar linearen Mengen operieren. Als geeignete Datenstruktur verwenden wir daher Mengen, die ausschließlich aus Elementen  $\lambda_j = (b_j, P_j, q_j)$  bestehen, wo die Komponenten von  $\lambda_j$  entsprechend die Basis, Periodenmenge und den kontrollierenden Zustand einer linearen Menge  $\overline{L(x_j, P_j)} = (L(x_j, P_j), q_j)$  aus  $N^2 \times Q$  darstellen. Auch die in Zeile e ausgegebene Menge (falls es zu dieser Ausgabe überhaupt kommt) kann nicht die Erreichbarkeitsmenge selbst enthalten, sondern höchstens deren Spezifikation im o.e. Sinne. Den Zusammenhang zwischen unserer Datenstruktur und den Mengen, die sie beschreibt, beleuchtet die folgende Gleichung:

$$\vec{M} = \bigcup_{(x_j, P_j, q_j) \in M} \overline{L(x_j, P_j)} = \bigcup_{(x_j, P_j, q_j) \in M} (L(x_j, P_j), q_j).$$

Der aus [10] bekannte Algorithmus, der als Prozedur in Zeile 3) aufgerufen wird ( $r10()$ ), arbeitet ebenfalls mit dieser Datenstruktur. Ferner können Operationen, wie Vereinigung Durchschnitt und Translation von Mengen aus  $N^n \times Q$  (in unserem Fall aus  $N^2 \times Q$ ), problemlos auf dem Boden dieser Datenstruktur durchgeführt werden. Aus diesem Grund wollen wir die weitere Diskussion auf die Mengen selbst und nicht auf deren Spezifikationen beziehen.

**Lemma 5.4.1.** Der Algorithmus  $\mathfrak{A}1$  hält in endlicher Zeit für alle Vektor-Additionssysteme  $\mathcal{U}^i$  der Dimension  $n \leq 2$  mit genau einer inhibitor-Kante und für alle Anfangsmengen  $\vec{M}_0 \in \text{sem}(N^2 \times Q)$ .<sup>4</sup>

**Beweis:** Induktiv nach der Länge des (Baum-) Pfades folgern wir zunächst, daß der Algorithmus  $r10()$  ausschließlich auf Translationen sowie Durchschnitte mit  $\eta^i$  von Mengen angewendet wird, die er selbst geliefert hat - also auf semilineare Mengen. Und weil  $\mathcal{U}$  ein gewöhnliches Vektor-Additionssystem ist, enden diese Aufrufe in endlicher Zeit. Ferner arbeitet der Algorithmus  $r10()$  mit den gleichen Datenstrukturen und liefert stets endliche Mengen  $\{(x_j, P_j, q_j)\}_{1 \leq j \leq m}$  [10]. Demnach durchläuft die Schleife <sup>5)-8)</sup> jeweils nur endlich viele Linearkomponenten aus  $L'$  (mit leeren Periodenmengen). Die gleiche Induktion belegt darüberhinaus, daß der fan-out des erzeugten Baumes beschränkt ist, weshalb wir davon ausgehen können, daß es stets nur endlich viele Blätter gibt, die die Schleife <sup>10)-12)</sup> zu durchlaufen hat. Schließlich sind offensichtlich alle Operationen in den einzelnen Zeilen in endlicher Zeit durchführbar, weil wir nur mit endlichen Spezifikationen linearer bzw. semilinearer Mengen arbeiten und weil die Semilinearität invariant ist unter diesen Ope-

<sup>3</sup> In der Hoffnung, den Leser nicht zu verwirren, sprechen wir von Transitionen und Stellen in einem Vektor-Additionssystem. Es ist dabei stets an das äquivalente Petri-Netz zu denken.

<sup>4</sup> Die Anfangsmenge muß nicht unbedingt linear sein. Der Algorithmus  $r10()$  ist selbstverständlich auch auf semilineare Anfangsmengen anwendbar [10] und wird in unserem Algorithmus für solche Mengen aufgerufen (Translationen linearer Mengen sind i.a. semilinear).

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

rationen. Unsere Behauptung folgt dann sofort, wenn der errechnete Baum endliche Tiefe hat. Dazu betrachten wir einen Pfad aus diesem Baum und nehmen an, daß er unendlich ist, d.h. zu jedem Zeitpunkt des Berechnungsvorgangs stets  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{open}$  für den augenblicklich letzten Knoten auf diesem Pfad gilt. Zunächst analysieren wir die in Zeile 4) vorgenommene Aufspaltung der zuvor errechneten Menge  $L$ . Die bereits angesprochene Induktion nach der Länge des betrachteten Pfades läßt darauf schließen, daß die Mengen, die auf diesem Pfad vorkommen, entweder nur einzelne Punkte (d.h. Linearkomponenten mit leeren Periodenmengen) oder endlich viele Linearkomponenten mit  $P \neq \emptyset$  enthalten können. Es gilt sogar mehr. Nehmen wir an, daß ein Knoten  $\text{node}$  eine Menge  $\text{set}(\text{node}) = \{(x, \{p\}, q^a(t'))\}$  enthält und der Aufruf in Zeile 3) eine Komponente  $(y, \emptyset, q^a(t'))$  liefert. Dann müßte aber ein Punkt  $\vec{x}_1 \in \overline{L(x, \{p\})}$  existieren, mit  $\vec{x}_1 \rightarrow \vec{y}$ . Für Punkte  $\vec{z}$  mit  $z > x_1$  wäre aber zu folgern:  $\vec{z} \rightarrow \overline{y + z - x_1}$ . Dieser Widerspruch, zusammen mit der Induktion nach der Mächtigkeit der Periodenmenge und Anzahl der Linearkomponenten in  $\text{set}(\text{node})$  bedeutet, daß einzelne Punkte nicht mehr erreichbar sind, sobald ein  $\text{set}(\text{node})$  mit mindestens einer Periode berechnet worden ist. In Zeile 4) wird dann folglich keine Aufspaltung mehr vorgenommen, was für den betrachteten Pfad heißt, daß er nicht mehr gabelt. Auf jeden Fall können wir davon ausgehen, daß für zwei aufeinanderfolgende Knoten  $\text{node}_1$  und  $\text{node}_2$

$$\text{set}(\text{node}_1) \subseteq \text{set}(\text{node}_2)$$

und für die inneren Knoten (bis auf den augenblicklich letzten) sogar

$$\text{set}(\text{node}_1) \subset \text{set}(\text{node}_2)$$

gelten muß. (Letzteres folgern wir einmal mehr aus der Induktion nach der Pfadlänge). Wir haben also eine Folge von semilinearen und stets expandierenden Mengen aus der inhibitor-Hyperebene  $\eta'$ , die ihrerseits ein eindimensionales und damit wohlgeordnetes Gitter ist. Wegen Lemma 4.1 heißt es aber, daß die letzte Inklusion nach endlicher Zeit nicht mehr gegeben ist – solche Pfade werden dann in Zeile 11) „geschlossen“. Damit kann unser Pfad nur dann unendlich sein, wenn er ausschließlich Linearkomponenten mit leeren Periodenmengen, also einzelne Punkte enthält. Diese Punkte müssen aber von Knoten zu Knoten verschieden sein (andernfalls wird in Zeile 11) sofort  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{closed}$  gesetzt) und darüberhinaus müßten sie in Richtung weg von der Wurzel immer kleiner werden (sonst kommt in Zeile 7) eine Periode hinzu). Eine permanent fallende Folge kann es aber nicht geben (Satz von Dickson). Die Pfade sind demnach endlich und wegen des Lemmas von König auch der ganze Baum, dessen fan-out ja beschränkt ist.  $\square$

**Lemma 5.4.2.** Für alle Vektor-Additionssysteme  $\mathcal{U}'$  mit genau einer inhibitor-Kante, der Dimension  $n \leq 2$  und alle Anfangsmengen  $\vec{M}_0 \in \text{sem}(N^2 \times Q)$  hält der Algorithmus  $\mathfrak{A}1$  nur dann, wenn gilt:

$$\vec{E} = \bigcup_{(x, P, q) \in E} (L(x, P), q) = \mathfrak{X}_{\mathcal{U}'}(\vec{M}_0) \cap \eta'.$$

**Beweis:** Wir zeigen  $\vec{E} \supseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{U}'}(\vec{M}_0) \cap \eta'$  im Teil **a)** und  $\vec{E} \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{U}'}(\vec{M}_0) \cap \eta'$  im Teil **b)**.

- a)** Wir betrachten den errechneten Baum und beweisen unsere Behauptung durch vollständige Induktion nach der Länge  $|\tau|$  einer (zulässigen) Schaltfolge  $\tau \in T^*$ . Nichts ist zu zeigen für  $|\tau| = 0$ . Nehmen wir an (und das ist unsere Induktionsvoraussetzung), daß der Algorithmus  $\mathfrak{A}$  erst dann hält, wenn alle durch Schaltpfade der Länge  $|\tau| \leq k \in \mathbb{N}$  erreichbaren Punkte (aus der inhibitor-Hyperebene) bereits in  $\vec{E}$  enthalten sind, d.h.  $\vec{E} \supseteq \{(x, q^a(t')) \mid \vec{M}_0 \xrightarrow{\tau} (x, q^a(t')), \tau \in T^*, |\tau| \leq k\}$ . Weiter nehmen wir an, daß ein Punkt  $(y, q^a(t')) \in \mathbb{N}^2 \times Q$  nicht in  $\vec{E}$  enthalten ist, obwohl der Algorithmus gehalten hat und obwohl dieser Punkt auf einem Schaltpfad  $\omega \in T^*$  der Länge  $|\omega| = k + 1$  von  $\vec{M}_0$  aus erreichbar ist. Es kann aber nur dann der Fall gewesen sein, wenn für alle Blätter  $\text{set}(\text{leaf})$  in der Vereinigung ihrer Vorgänger enthalten waren (in Zeile 11), was der Definition von  $\text{shift}^1(\cdot)$  widerspricht, wenn die letzte Transition in  $\omega$  gerade die inhibitor-Transition war. War die letzte Transition in diesem Schaltpfad eine gewöhnliche Transition  $t \neq t'$ , dann müßte sie der Algorithmus  $\Gamma 10()$  im letzten Durchlauf nicht berücksichtigt haben. Daraus folgt aber, daß auch Punkte  $(y, q^a(t'))$  mit  $\vec{M}_0 \xrightarrow{\omega} (y, q^a(t'))$  in  $\vec{E}$  enthalten sind, was uns den Induktionsschritt liefert.
- b)** Offensichtlich erreichen wir in  $\mathcal{U}$  nur Punkte aus der Erreichbarkeitsmenge des  $\mathcal{U}'$ . Zu überlegen bleibt nur, ob die in der Zeile 7) definierte Erweiterung von  $\text{set}(\text{succ})$  immer nur erreichbare Punkte enthält. Diese Erweiterung wird allerdings nur dann vorgenommen, wenn der Punkt  $(y, q^a(t'))$  von  $(x, q^a(t'))$  aus erreichbar ist, sagen wir durch ein  $\tau \in T^*$ . Damit gilt für alle  $c \in \mathbb{N}$ :

$$\vec{x} = (x, q^a(t')) \xrightarrow{(\tau)^c} (x + c(y - x), q^a(t')) = \overline{x + c(y - x)} \in (L(x, y - x), q^a(t')),$$

falls die Bedingung in Zeile 7) erfüllt ist. Unsere Behauptung folgt dann sofort durch Induktion nach der Länge des (Baum-) Pfades.  $\square$

Aus  $\mathfrak{R}_{\mathcal{U}'}(\vec{L}_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{U}'}(\vec{E})$  berechnen wir abschließend die gesamte Erreichbarkeitsmenge durch einmaligen Aufruf von  $\Gamma 10()$ . Wegen Lemma 3.1 und der offensichtlichen algorithmischen Durchführbarkeit der dort beschriebenen Konstruktion ist die Eigenschaft (PN\*) belanglos (unser Algorithmus kann problemlos so modifiziert werden, daß er auch im Falle der Vektor-Ersetzungssysteme direkt anwendbar wird). Ferner könnte der Algorithmus  $\mathfrak{A}$  auf jede Linearkomponente einer semilinearen Anfangsmenge separat angewendet werden. Wir erhalten folglich die Invarianz der Semilinearität unter semilinearen Anfangsmengen für die hier betrachtete Petri-Netz Variante, also die Berechenbarkeit der Erreichbarkeitsmengen für alle  $\vec{M}_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^2 \times Q)$ .  $\square$

Der Algorithmus  $\mathfrak{A}$  1 kombiniert die inhibitor-Translation mit der Berechnung der Erreichbarkeitsmengen unter Ausschluß der inhibitor-Transition. Diese Vorgehensweise kann als die allgemeine Berechnungsstrategie für Petri-Netz-Erreichbarkeitsmengen an-

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

## ALGORITHMUS A2

```

input( $U^{k_1}, \{(x_0, P_0, q_0)\}$ ); /*  $U^{k_1}$  -ein zweidimensionales Vektor-Additionssystem mit
kontrollierenden Zuständen, beliebig vielen inhibitor-
Kanten, und genau einer inhibitor-Stelle. O.B.d.A. nehmen
wir an:  $q_0 = q^a(t')$ . */

procedure rset( $U^{k_1}, \bar{M}$ );

begin

1) let set(root) =  $\{(x_0, P_0, q^a(t'))\}$ , tag(root) = open; /* root hat keine
Vorgänger */

2) on pick leaf: tag(leaf) = open; /* leaf hat keine Nachfolger */
if not exists go e; /* alle Pfade geschlossen, Ausgabe */

3) if  $k = 1$  let  $L = [r10(\text{shift}'(\text{set}(leaf))) \cap \eta^1]$ ; /*  $U^{0_1} = U$  */
else let  $L = [rset(U^{(k-1)_1}, \text{shift}'(\text{set}(leaf))) \cap \eta^1]$ ;

4) let  $L' = \{(x_j, P_j, q^a(t')) \mid P_j = \emptyset\}$ ,  $L'' = L \setminus L'$ ;
5) for each  $((x_j, \emptyset, q^a(t')) \in L')$  begin
6) create succ; let leaf  $\xrightarrow{\text{next}}$  succ, set(succ) =  $(x_j, \emptyset, q^a(t'))$ ;
/* succ wird direkter Nachfolger von leaf. */
7) if set(leaf) =  $(x, \emptyset, q^a(t'))$  & set(succ) =  $(y, \emptyset, q^a(t'))$  &  $x < y$ 
let set(succ) =  $(x, \{y - x\}, q^a(t'))$ ;
8) end;
9) if  $L'' \neq \emptyset$  create succ; let leaf  $\xrightarrow{\text{next}}$  succ, set(succ) =  $L''$ ;
10) for each (current leaf) begin
11) if set(leaf)  $\subseteq \left[ \bigcup_{\text{ancestors}(leaf)} \text{set}(ancestor) \right]$  let tag(leaf) = closed
else tag(leaf) = open;
12) end, go on;
e return( $E = \bigcup_{\text{leaves}} \text{set}(leaf)$ ); /* nichtdisjunkte Vereinigung */

end;

```

gesehen werden - auch dann, wenn das gegebene Petri-Netz mehrere inhibitor-Kanten enthält. Die inhibitor-Translation kann nämlich auch hinsichtlich mehrerer inhibitor-Transitionen definiert werden. Das Hauptproblem besteht in der Frage, ob ein solcher Algorithmus in endlicher Zeit seine Arbeit verrichten würde. Kann diese Frage nicht beantwortet werden, dann gibt es auch keine Garantie für die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen, weil eine unendliche Vereinigung von semilinearen Mengen nicht unbedingt semilinear ist. (Das Petri-Netz aus dem Beispiel Abb. 4 ist eine Bestätigung hierfür.)

Allerdings ist die inhibitor-Hyperebene im zweidimensionalen Gitter stets wohlgeordnet - unabhängig von der Anzahl der inhibitor-Kanten. Das Lemma 4.1 greift also auch in diesem Falle. Dieser Umstand läßt aber noch nicht darauf schließen, daß in diesem „Minigitter“ auch weitere inhibitor-Kanten nichts an der Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen ändern würden, denn das Lemma 4.1 ist nur dann von Bedeutung, wenn aus  $(x, q) \rightarrow^* (y, q)$  mit  $y > x$  die Erreichbarkeit von  $(x, \{y-x\}, q)$  gefolgert werden kann. Letzteres ist aber nur dann möglich, wenn die inhibitor-Hyperebene mit nur einer Gitterachse einen nichtleeren Durchschnitt hat (ein geeignetes Gegenbeispiel werden wir noch ausführlich diskutieren - siehe Abb. 9). Für Petri-Netze bedeutet es zwar beliebig viele inhibitor-Kanten und inhibitor-Transitionen, aber nur eine inhibitor-Stelle. Gerade diesem Spezialfall wollen wir uns jetzt zuwenden. Unserer Berechnungsstrategie folgend, könnte man die inhibitor-Translation hinsichtlich aller inhibitor-Transitionen definieren und die Erreichbarkeitsmengen ähnlich wie im Algorithmus A1 berechnen. Wir gehen hier einen anderen Weg und versuchen einen rekursiven Ansatz. Zunächst beobachten wir, daß aufgrund der Spezifik der hier betrachteten Petri-Netze  $\mathcal{U}^k$  mit  $k$  sowohl die Anzahl der inhibitor-Kanten, als auch die der inhibitor-Transitionen gemeint ist. Der Algorithmus A2 berechnet die Erreichbarkeitsmenge von  $\mathcal{U}^k$  rekursiv, die inhibitor-Transitionen nacheinander eliminierend.

**Theorem 5.5.** Die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen sind für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme - jeweils mit kontrollierenden Zuständen, beliebig vielen inhibitor-Kanten und genau einer inhibitor-Stelle - gleich und betragen  $n^* = 2$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{U}^k}(\bar{M}_0) \in \text{sem}(\mathbb{N}^2 \times Q) \text{ für alle } \bar{M}_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^2 \times Q).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar.

**Beweis:** Durch Induktion nach der Anzahl der inhibitor-Transitionen. Der Induktionsanfang ist für  $k=0$  trivial, für  $k=1$  ist es gerade das Lemma 5.4. Die Lemmata 5.4.1 und 5.4.2 liefern den Induktionsschritt, wenn wir auf  $\text{rset}(\mathcal{U}^{(k-1)}, \cdot)$ , statt auf  $\text{rlo}(\cdot)$  zurückgreifen. Laut Induktionsvoraussetzung berechnet  $\text{rset}(\mathcal{U}^{(k-1)}, \cdot)$  die (stets semilinearen) Erreichbarkeitsmengen unter Ausschluß einer beliebigen inhibitor-Transition und folglich gelten 5.4.1 und 5.4.2 auch für den Algorithmus A2. □

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

## ALGORITHMUS A2'

```

input( $U^{k_1}, \{(x_0, P_0, q_0)\}$ ); /*  $U^{k_1}$  - ein zweidimensionales Vektor-Additionssystem mit
    kontrollierenden Zuständen, vielen inhibitor-Kanten und
    genau einer inhibitor-Stelle.
    */

procedure rset( $U^{k_1}, \vec{M}$ );

begin

1) let set(root) =  $\{(x_0, P_0, q_0)\}$ , tag(root) = open; /* root hat keine
    Vorgänger */

2) on pick leaf: tag(leaf) = open; /* leaf hat keine Nachfolger */
    if not exists go e; /* alle Pfade geschlossen, Ausgabe */

3) if  $k = 1$  let  $L = [r10(\text{shift}^1(\text{set}(\text{leaf})))];$  /*  $U^{0_1} = U$  */
    else let  $L = [rset(U^{(k-1)}, \text{shift}^1(\text{set}(\text{leaf})))];$ 

4) let  $L' = \{(x_j, P_j, q_j) \mid P_j = \emptyset\}$ ,  $L'' = L \setminus L'$ ;
5) for each  $((x_j, \emptyset, q_j) \in L')$  begin
6) create succ; let  $\text{leaf} \xrightarrow{\text{next}} \text{succ}$ , set(succ) =  $(x_j, \emptyset, q_j)$ ;
    /* succ wird direkter Nachfolger von leaf. */
7) if set(leaf) =  $(x, \emptyset, q_j)$  & set(succ) =  $(y, \emptyset, q_j)$  &  $x < y$ 
    let set(succ) =  $(x, \{y - x\}, q_j)$ ;
8) end;
9) if  $L'' \neq \emptyset$  create succ; let  $\text{leaf} \xrightarrow{\text{next}} \text{succ}$ , set(succ) =  $L''$ ;
10) for each (current leaf) begin
11) if set(leaf)  $\subseteq \left[ \bigcup_{\text{ancestors}(\text{leaf})} \text{set}(\text{ancestor}) \right]$  let tag(leaf) = closed
    else tag(leaf) = open;
12) end, go on;

return( $E = \bigcup_{\text{nodes}} \text{set}(\text{leaf})$ ); /* nichtdisjunkte Vereinigung */

end;

```

Der Algorithmus  $\mathcal{A}2$  kann auch dahingehend modifiziert werden, daß die Berechnung der Erreichbarkeitsmenge von  $U^k$  direkt erfolgt, d.h. ohne zuerst deren Durchschnitt mit der inhibitor-Hyperebene zu ermitteln. Die in der Zeile <sup>3)</sup> errechnete Menge enthält i.a. auch Linearkomponenten mit  $q \neq q^a(t')$ , die dennoch in  $L''$ , bzw.  $L'$  übernommen werden können (was im Algorithmus  $\mathcal{A}2$  nicht geschieht). Der Leser kann leicht nachprüfen, daß die Lemmata 5.4.1 und 5.4.2 (in entsprechend abgeänderter Form) auch für den Algorithmus  $\mathcal{A}2'$  gelten. Die in Zeile e) ausgegebene Menge spezifiziert bereits die zu berechnende Erreichbarkeitsmenge des  $U^k$ . (Hinweis: die inhibitor-Translation für Punkte mit  $q \neq q^a(t')$  ist die Identität).

Wir müssen nur noch die Frage klären, ob die Einschränkung auf nur eine inhibitor-Stelle aus dem vorangegangenen Theorem tatsächlich erforderlich ist. Das Petri-Netz aus Abb.9 ist beispielhaft dafür, daß - trotz wohlgeordneter inhibitor-Hyperebene - das Lemma 4.1 u.U. gar nicht zur Geltung kommt. Daraus gewinnen wir eine weitere dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze:

**Theorem 5.6.** Die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen sind für gewöhnliche Vektor-Additionssysteme und Vektor-Ersetzungssysteme - jeweils mit kontrollierenden Zuständen und beliebig vielen inhibitor-Kanten - gleich und betragen  $n^* = 1$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_{q^k}(\vec{M}_0) \in \text{sem}(N^1 \times Q) \text{ für alle } \vec{M}_0 \in \text{sem}(N^1 \times Q).$$

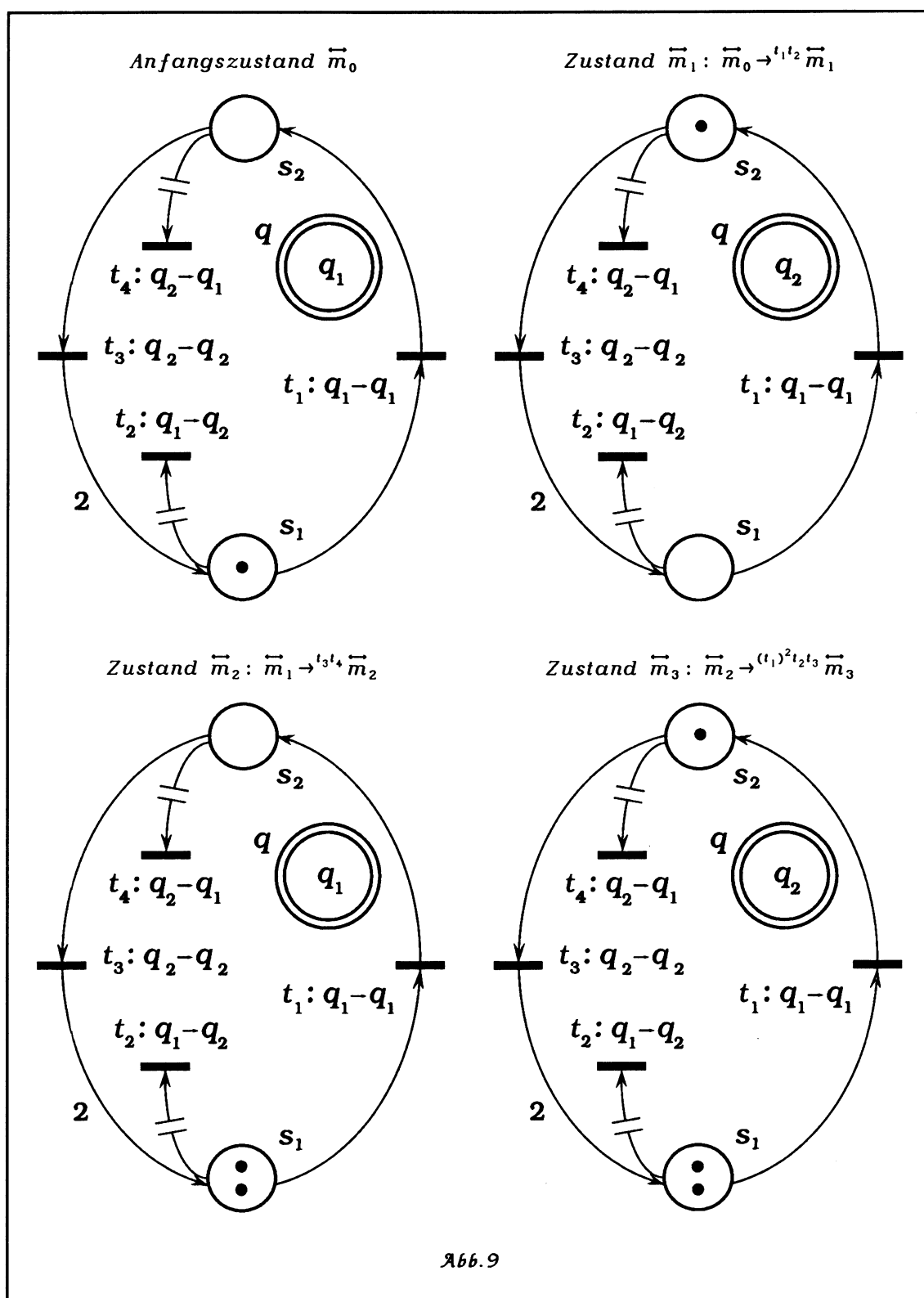
Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar.

**Beweis:** Die Semilinearität in  $N \times Q$  folgt sofort aus dem Theorem 5.5. Auf der anderen Seite besitzt das Petri-Netz aus Abb.9 eine offensichtlich nicht-semilineare Erreichbarkeitsmenge. Der Leser kann leicht nachprüfen, daß in jedem Zustand genau eine Transition aktiviert ist. Die Erreichbarkeitsmengen auf den Gitterachsen (in jedem kontrollierenden Zustand) können durch  $\{(2)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  spezifiziert werden.  $\square$

**Korollar 5.7.** Die Erreichbarkeitsmengen der fünfdimensionalen Vektor-Additionssysteme, sowie der vierdimensionalen Vektor-Ersetzungssysteme - jeweils mit mindestens zwei inhibitor-Vektoren - sind bereits unter einelementigen Anfangsmengen im allgemeinen nicht-semilinear.  $\square$

Wir sehen also, daß die in [10] ermittelte Semilinearitätsgrenze durch zwei inhibitor-Kanten auf jeden Fall tangiert wird. Gleiches gilt für Vektor-Ersetzungssysteme - letzteres werden wir allerdings erst nach weiteren Überlegungen folgern können (die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für gewöhnliche Vektor-Ersetzungssystem ohne kontrollierende Zustände ist vorerst nicht bekannt).

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN



*Mit den bisher gewonnenen Resultaten können wir zufrieden sein. Für die Klasse der Petri-Netze mit kontrollierenden Zuständen haben wir exakte, dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenzen in Abhängigkeit von der Anzahl der inhibitor-Kanten ermittelt. Ferner haben wir festgestellt, daß zur Verschiebung der Semilinearitätsgrenze gegenüber den gewöhnlichen Petri-Netzen (mit kontrollierenden Zuständen) zwei inhibitor-Kanten erforderlich sind. Und schließlich haben wir gelernt, daß im Hinblick auf die Semilinearitätsgrenzen die Anzahl der inhibitor-Stellen adäquater ist, als die der inhibitor-Kanten, oder gar der inhibitor-Transitionen.*

*Weiter darf vermutet werden, das die qualitative Verstärkung des Grundmodells in Form von inhibitor-Kanten nicht gleichbedeutend ist mit einem wirksamen Kompaktierungsmittel<sup>5</sup> - schon gar nicht, wenn nur eine inhibitor-Kante zur Verfügung steht. Nicht-semilineare Erreichbarkeitsmengen sind dann erst im dreidimensionalen Gitter möglich, und darüberhinaus benötigen wir weitere Stellen, um die wohl kaum entbehrlichen kontrollierenden Zustände zu simulieren. Letzteres ist nur eine von zwei Fragen, die sich dabei aufdrängen. Weiter müssen wir uns fragen, welche Petri-Netze (mit kontrollierenden Zuständen und nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen) die einfachsten sind im Hinblick auf die eventuelle Simulation. Ist es vielleicht das Petri-Netz aus dem Beispiel Abb. 5? (das Petri-Netz Abb. 9 lassen wir bewußt außer Betracht, weil es bereits zwei inhibitor-Kanten enthält). Die positive Beantwortung beider Fragen würde das Problem der dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen auf die Simulierbarkeit eines bestimmten Petri-Netzes reduzieren (z.B. Abb. 5). Dadurch könnten die sicherlich aufwendigen Beweise (diese Erfahrung werden wir noch reichlich machen dürfen) überflüssig werden. Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden wir versuchen, diesen Weg zu gehen. Nur dort, wo die Semilinearitätsgrenzen Petri-Netze mit genau einer inhibitor-Kante mittelbar oder unmittelbar betreffen, soll die exakte Beweisführung nicht ausbleiben.*

*Bevor wir mit einer weiteren, für unsere Betrachtungen relevanten Semilinearitätsgrenze fortfahren, studieren wir noch eine andere mögliche Simulation des Petri-Netzes aus Abb. 5, und zwar in einem Vektor-Additionssystem mit zwei zusätzlichen Stellen und zwei inhibitor-Kanten (letztere sind dafür unbedingt erforderlich). Die Abb. 10 schildert die Zustandsveränderungen, die einmal mehr auf die inzwischen hinlänglich bekannte Schaltfolge  $t_1 t_2 t_3 t_4 (t_1)^2 t_2 t_3$  zurückgehen. Die Abb. 11 enthält eine Zusammenstellung von bislang kennengelernten Simulationsmöglichkeiten, bezogen jeweils auf entsprechende Varianten des Grundmodells.<sup>6</sup> Der interessante Punkt an den Beispielen Abb. 9 und Abb. 10 ist der, daß zwei inhibitor-Kanten, eingesetzt als Simulationsmittel oder als Kompaktierungsmittel des zu simulierenden Petri-Netzes, gleiches bewirken, nämlich die Verschiebung der dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenze gegenüber dem Grundmodell.*

---

<sup>5</sup> Gemeint ist vor allem die Kompaktierung von WPNC's und Zählerautomaten, die im nächsten Kapitel ausführlich diskutiert werden.

<sup>6</sup> Mit der Simulation der kontrollierenden Zustände auf der Basis des Grundmodells meinen wir ein gewöhnliches Vektor-Additionssystem mit 6 Stellen (davon 3 Simulationsstellen), das laut Lemma 3.3 existiert. Siehe auch Anhang A.

§5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

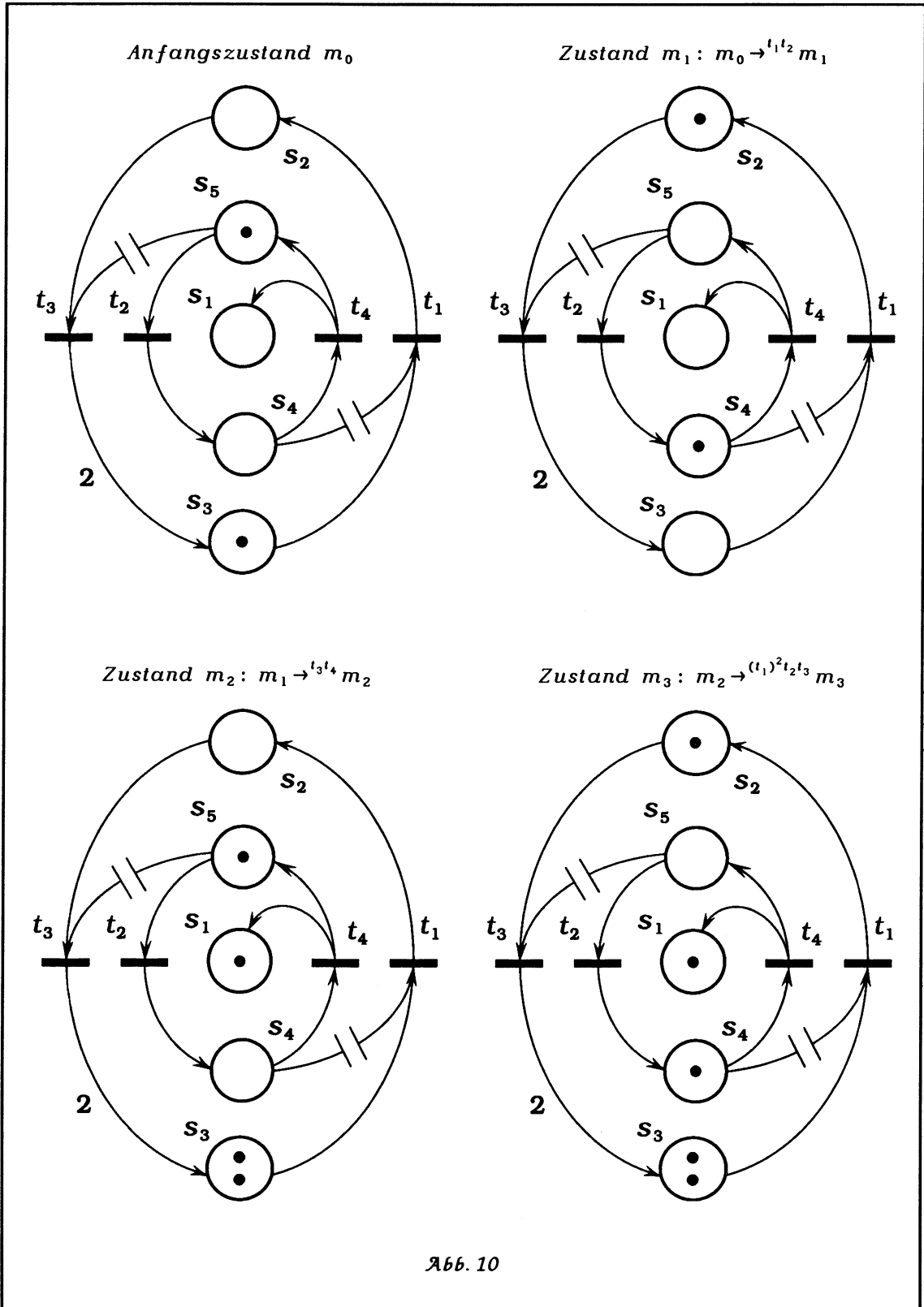


Abb. 10

85. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

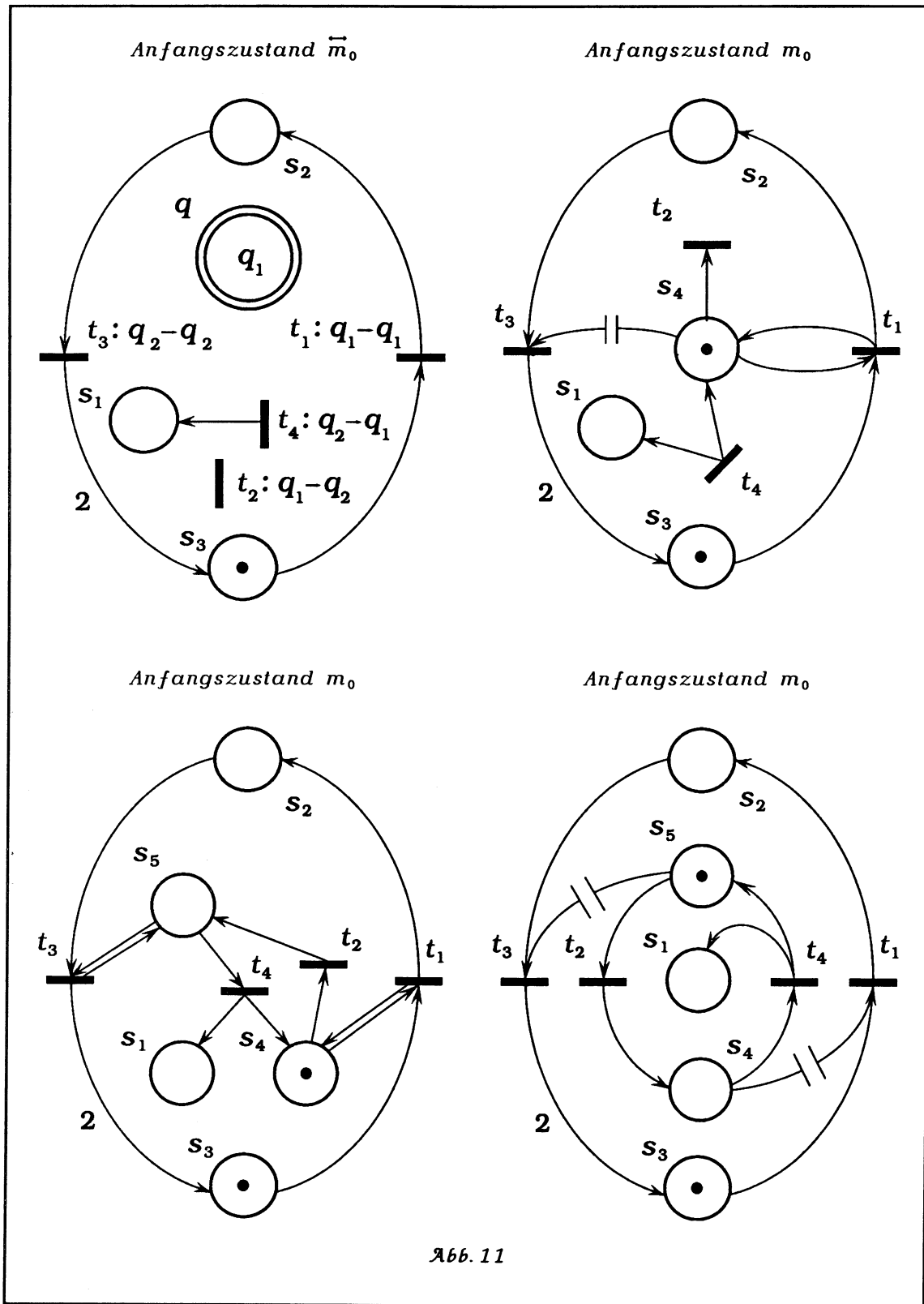


Abb. 11

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

Die Beispiele Abb. 9, Abb. 10 (zusammen mit Lemma 5.2) belegen zwar die Verschiebung der Semilinearitätsgrenze durch inhibitor-Kanten. Auf der anderen Seite wollen wir nicht vergessen, daß zwei solche Kanten ein sehr starkes Mittel sind (wegen der noch zu präzisierenden Simulierbarkeit von Turing-Maschinen - §6). Außerdem sind zwei kontrollierende Stellen in dieser Hinsicht gleichwertig (Abb. 2). Unsere Fragestellung geht daher in die Richtung, ob bereits eine einzelne inhibitor-Kante eine solche Verschiebung verursachen kann. Um diese Frage zu beantworten, untersuchen wir die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme (ohne kontrollierende Zustände).

Auf der Suche nach einer geeigneten Beweisstrategie überlegen wir zunächst, welchen Wert die bislang erzielten Resultate im Hinblick auf die zu beweisende Aussage darstellen. Erinnern wir uns z.B. an das Korollar 3.7, das uns die Möglichkeit liefert, Stellen mit beschränkten Projektionen der Erreichbarkeitsmengen mit Hilfe von kontrollierenden Zuständen zu simulieren. Vierdimensionale Vektor-Ersetzungssysteme mit (mindestens) zwei solchen Stellen sind demnach durch (höchstens) zweidimensionale Petri-Netze (wegen Lemma 3.1 sogar Vektor-Additionssysteme) mit kontrollierenden Zuständen simulierbar, und daraus folgt sofort die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen (Theorem 5.4 oder bereits das Lemma 5.1). Welche Aussage läßt sich aber aus dieser Überlegung ableiten, wenn drei oder gar alle vier Stellen unbeschränkte Projektionen der Erreichbarkeitsmengen haben? Eine willkürliche Einschränkung der Aufnahmekapazitäten zweier Stellen<sup>7</sup> ermöglicht zwar wieder den gleichen Ansatz - nicht aber den Schluß auf die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen. Auch nicht in dem zwangsläufig spezifizierten Teilgitter von  $\mathbb{N}^4$  (rein mengentheoretisch zu verstehen), weil wir ja nur Schaltpfade zulassen, die in diesem Teilgitter verbleiben. Sollte aber eine ähnliche Aussage auch in den anderen Regionen<sup>8</sup> möglich sein, dann läge es nahe, hier eine Art „divide & conquer“ zu verfolgen. In der zweiten Phase („conquer“) müßten dann auch solche Schaltpfade berücksichtigt werden, die all diese Regionen „durchwandern“, was umso einfacher sein dürfte, je höher die Qualität der Teillösungen in den einzelnen Regionen sein wird. Und diese Teillösungen werden uns wohl kaum mehr liefern als die Semilinearität und vielleicht Berechenbarkeit der Erreichbarkeitsmengen - wahrscheinlich eben nur auf einigen Schaltpfaden und in gewissen Teilgittern. Formal wollen wir solche Aussagen folgendermaßen notieren:

$$\mathfrak{R}_P^{[G]}(\cdot) \cap N; N \subseteq G \subseteq \mathbb{N}^4 \quad (\text{darunter verstehen wir die Erreichbarkeitsmenge des Petri-Netzes } \mathcal{P} \text{ im Teilgitter } N \text{ auf Schaltpfaden aus } G).$$

<sup>7</sup> Petri-Netze mit eingeschränkten Aufnahmekapazitäten der Stellen sind eine weitere Grundmodell-Variante, die wir hier allerdings nicht zu diskutieren brauchen. Diese Eigenschaft kann problemlos mit Hilfe von entsprechend angebundenen komplementären Stellen herbeigeführt werden (vgl. Diskussion des Beispiels Abb. 2, §2), die ebenfalls durch kontrollierende Zustände simulierbar sind.

<sup>8</sup> Teilgitter, deren Vereinigung das gesamte  $\mathbb{N}^4$  ergibt, wollen wir als Regionen bezeichnen. Implizit mitgemeint ist also stets eine entsprechende Aufteilung des  $\mathbb{N}^4$ , allerdings nicht unbedingt disjunkt.

Bis zum Ende dieses Kapitels verstehen wir unter  $\mathcal{V}$  ein vierdimensionales und gewöhnliches Vektor-Ersetzungssystem. Die erste Teillösung haben wir bereits gewinnen können:

**Lemma 5.9.** Für alle  $\mathcal{V}$ , alle Komponentenpaare  $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$  mit  $j \neq k$  und alle  $h_j, h_k \in \mathbb{N}$  sind die Erreichbarkeitsmengen in den jeweiligen Regionen  $H^{j,k} = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x_j \leq h_j \wedge x_k \leq h_k\}$  auf Schaltpfaden aus diesen Regionen, für alle Anfangsmengen  $M_0 \in \text{sem}(H^{j,k})$  stets semilinear und effektiv berechenbar. Es gilt also für alle  $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $j \neq k$  und  $h_j, h_k \in \mathbb{N}$ :

$$\forall M_0 \in \text{sem}(H^{j,k}): \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}^{[H^{j,k}]}(M_0) \in \text{sem}(H^{j,k}).$$

**Beweis:** Da die Stellen  $s_j$  und  $s_k$  nicht größer werden können<sup>9</sup> als entsprechend  $h_j$  und  $h_k$ , können sie laut Korollar 3.7 durch kontrollierende Zustände „wegsimuliert“ werden. Unsere Behauptung folgt dann aus dem Lemma 5.1.  $\square$

Wichtig an dieser Aussage ist der allgemeine Quantor, der dahinter steckt. Die Wahl der Konstanten  $h_j$  und  $h_k$  ist nämlich völlig beliebig. Das im nachstehenden Lemma festgehaltene Resultat gilt dagegen nur bei geeigneter Wahl der entsprechenden Konstanten.

**Lemma 5.10.** Für alle (gewöhnliche) Vektor-Ersetzungssysteme  $\mathcal{V}^n$  und alle Komponenten  $i \in \{1, \dots, n\}$  gibt es eine effektiv berechenbare<sup>10</sup> Konstante  $h^i = \{h_1^i, \dots, h_n^i\}$  mit  $h_i^i = 0$ , sodaß gilt: Es gibt effektiv berechenbare und semilineare Mengen, die die Erreichbarkeitsmengen des  $\mathcal{V}^n$  in den jeweiligen Regionen  $H^i = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x \geq h^i\}$  auf Schaltpfaden aus diesen Regionen gänzlich enthalten, die ihrerseits aber Teilmengen der Erreichbarkeitsmengen von  $\mathcal{V}^n$  sind. Formal heißt das für die jeweiligen Regionen:

$$\exists L^i \in \text{sem}(H^i): \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^i]}(M_0) \subseteq L^i \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(M_0) \text{ für alle } M_0 \in \text{sem}(H^i).$$

**Bemerkung:** Zwar ist diese Aussage sogar dimensionsunabhängig - in anderer Hinsicht ist sie jedoch deutlich schwächer, als das Lemma 5.9. Das hängt zum einen mit dem spezifischen Quantor zusammen ( $\exists h^i$ ), zum anderen erhalten wir nicht die Erreichbarkeitsmenge selbst, sondern deren semilineare Obermenge. Wichtig ist aber, daß diese „Einhüllende“ in der gesamten Erreichbarkeitsmenge des  $\mathcal{V}^n$  enthalten ist, was unser Beweis ebenfalls belegt.

<sup>9</sup> Damit meinen wir selbstverständlich die Projektionen der Erreichbarkeitsmengen auf die jeweiligen Stellen, die in diesem Falle beschränkt sind.

<sup>10</sup> Die Berechenbarkeit der relevanten Konstanten und Erreichbarkeitsmengen bis hin zu der gesuchten Erreichbarkeitsmenge von  $\mathcal{V}$  soll vollständig halber festgehalten werden. In der Tat markiert unser Beweis einen (wenn auch nicht sehr zu empfehlenden) Algorithmus zur Berechnung dieser Menge, obwohl die Berechenbarkeit aus der Semilinearität sofort folgt.

## 55. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

**Beweis:** Zunächst beobachten wir, daß die Testvektoren in Vektor-Ersetzungssystemen nur hinreichend nahe an den entsprechenden Gitterachsen von Bedeutung sind. Für die äquivalenten Petri-Netze heißt es, daß die kontrollierenden Stellen u.U. keine Transitionen effektiv kontrollieren. Sei  $g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{N}^n$  mit  $g_j = \max\{\xi(s_j, t) \mid t \in T: \xi(t, s_j) > 0\}$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Im Teilgitter  $G = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x \geq g\}$  verhält sich jedes Vektor-Ersetzungssystem  $\mathcal{V}^n$  wie ein Vektor-Additionssystem  $\mathcal{U}^n$ , d.h. wir können für alle Transitionen  $t \in T$  die folgende Modifikation hinsichtlich aller Stellen  $s_j \in S$  vornehmen, ohne das Verhalten und insbesondere die Erreichbarkeitsmengen von  $\mathcal{V}^n$  (in dem oben spezifizierten Teilgitter) zu verändern:

$$\begin{aligned} \xi'(s_j, t) &= 0 \wedge \xi'(t, s_j) = \xi(t, s_j) - \xi(s_j, t) \text{ falls } \xi(t, s_j) \geq \xi(s_j, t), \\ \xi'(t, s_j) &= 0 \wedge \xi'(s_j, t) = \xi(s_j, t) - \xi(t, s_j) \text{ falls } \xi(t, s_j) \leq \xi(s_j, t). \end{aligned}$$

Das so konstruierte Petri-Netz genügt offensichtlich ( $PN^*$ ), ist also ein (gewöhnliches) Vektor-Additionssystem. Deshalb können wir sicherlich die folgende Aussage machen:

**Lemma 5.10.1.** Für jedes gewöhnliche Vektor-Ersetzungssystem  $\mathcal{V}^n$  existiert ein Vektor-Additionssystem  $\mathcal{U}^n$  (ebenfalls ohne inhibitor-Kanten) und eine effektiv berechenbare Konstante  $g = \{g_1, \dots, g_n\}$ , sodaß im Teilgitter  $G = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x \geq g\}$  die Äquivalenz  $\mathcal{V}^n = \mathcal{U}^n$  besteht. Insbesondere gilt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}^{[G]}(M_0) \text{ für alle } M_0 \subseteq G. \quad \square$$

In hinreichend kleinen Dimensionen kann aus dieser Äquivalenz die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen in  $G$  gefolgert werden, was für den hier betrachteten vierdimensionalen Raum vorerst vielversprechend erscheinen mag. Dennoch geht diese Qualität der Aussage im Laufe der weiteren Überlegungen verloren. Wir erhalten lediglich - ähnlich, wie im Lemma 4.6 - „legale“ Überdeckungen (Einhüllende) der relevanten Mengen, und deshalb wollen wir von Anfang an mit solchen Strukturen arbeiten. Wir überlegen uns daher die Konsequenzen in beliebig großen Räumen und streben eine dimensionsunabhängige Aussage an.

**Korollar 5.10.2.** Seien  $\mathcal{V}^n$  und  $\mathcal{U}^n$  wie im Lemma 5.10 In Abhängigkeit von  $n$  gilt:

$$\text{für } n \leq 5: \forall M_0 \in \text{sem}(G): \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0) \in \text{sem}(G),$$

$$\text{für } n > 5: \exists G' \subseteq G \forall M_0 \in \text{sem}(G') \exists L \in \text{sem}(G'):$$

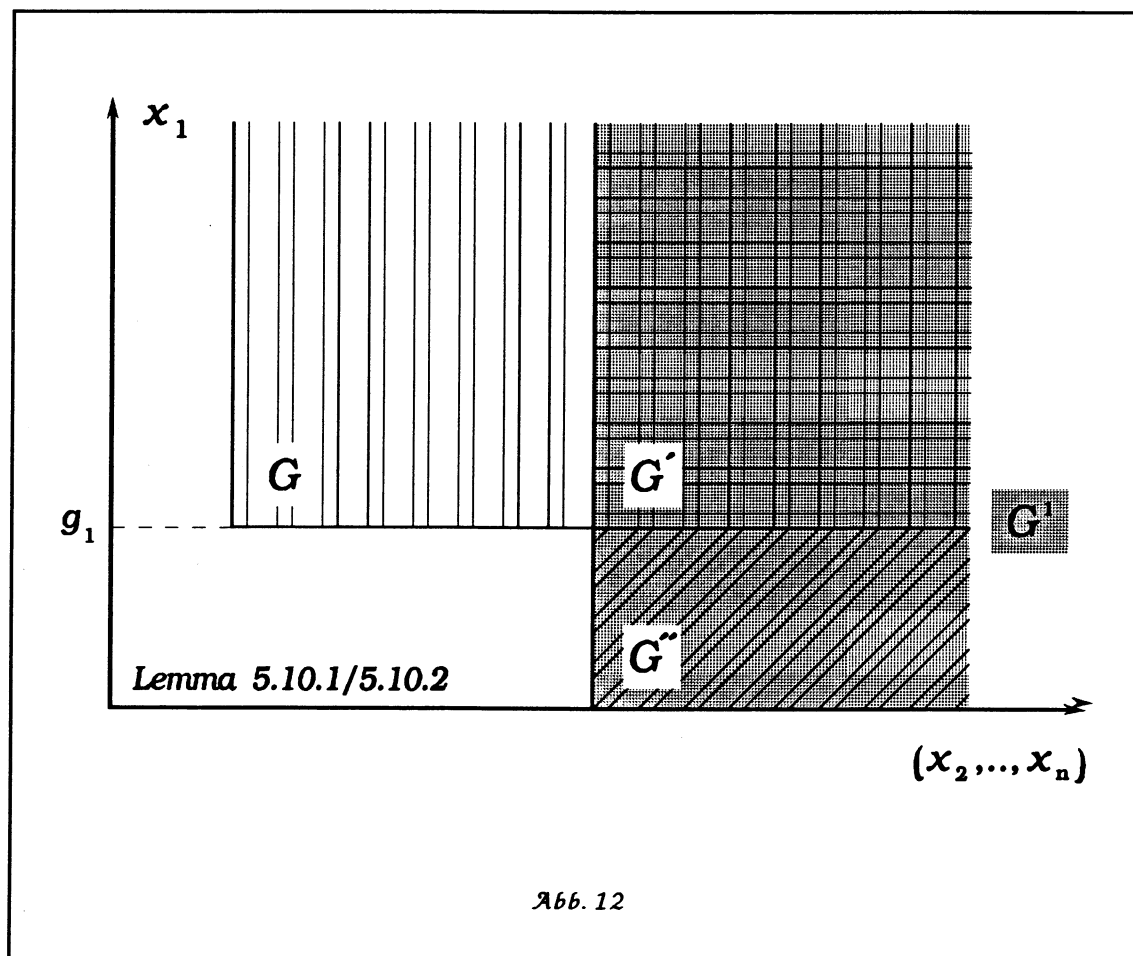
$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0) \subseteq L \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}^{[G]}(M_0).$$

**Beweis:** Der Austritt aus  $G$ , bzw.  $G'$  kann z.B. durch zusätzliche Stellen mit entsprechenden Anfangsmarkierungen verhindert werden. Allerdings, um dimensionsbezogene Aussagen machen zu können, benötigen wir eine bessere Lösung. Offensichtlich gilt:

## 85. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}(M_0 - g) + g \text{ falls } M_0 \subseteq G,$$

wobei  $M \pm g$  als Translation zu verstehen ist. Damit bringen wir die gewünschte Simulation ohne zusätzliche Stellen zustande. Die Lemmata 5.10.1 und 5.2 transitiv genommen, liefern dann sofort die Behauptung für  $n \leq 5$ . Für  $n > 5$  erhalten wir allerdings ein deutlich schwächeres Ergebnis. Die Äquivalenz  $\mathcal{V}^n = \mathcal{U}^n$  aus dem Lemma 5.10.1 legt die Einbettung vom Lemma 4.6 in das Teilgitter  $G'$  nahe, woraus ein  $G' \subseteq G$  resultiert, in dem die Erreichbarkeitsmenge des  $\mathcal{V}^n$  semilinear eingehüllt werden kann (diese Einhüllende enthält ausschließlich Punkte, die auf Schaltpfaden aus  $G$  erreichbar sind, d.h. nur Punkte aus der Erreichbarkeitsmenge von  $\mathcal{V}^n$ ). Sei also  $G' = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x \geq g'\}$  für ein  $g' \geq g$  im Sinne dieser Einbettung.<sup>11</sup> Zusammenfassend erhalten wir:



<sup>11</sup> Laut Lemma 4.6 müssen lediglich beliebige  $n-2$  Komponenten von  $g'$  hinreichend groß sein gegenüber  $g$ . Interessanterweise gibt es sogar eine lineare Einhüllende der betrachteten Erreichbarkeitsmenge - vorausgesetzt, daß beliebige  $n-1$  Komponenten von  $g$  entsprechend modifiziert werden. Siehe dazu [10].

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

$\exists G' \subseteq G \vee M_0 \in \text{sem}(G') \exists L \in \text{sem}(G')$ :

$$\mathfrak{K}_{\mathcal{V}^n}^{[G']}(M_0) \stackrel{5.10.1}{=} \mathfrak{K}_{\mathcal{U}^n}^{[G']}(M_0) \stackrel{4.6}{\subseteq} L \stackrel{4.6}{\subseteq} \mathfrak{K}_{\mathcal{U}^n}^{[G]}(M_0) \stackrel{5.10.1}{=} \mathfrak{K}_{\mathcal{V}^n}^{[G]}(M_0). \quad \square$$

Es ist wohl kaum zu erwarten, daß dieses Resultat bereits ausreicht, um zusammen mit dem Lemma 5.9 den Schluß auf die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze gewöhnlicher Vektor-Ersetzungssysteme zu ermöglichen. Wir beobachten, daß - unabhängig von der Wahl der Konstanten  $h_j$  und  $h_k$  aus dem Lemma 5.9 - auch für  $n = 4$  stets

$$G' \cup \left( \bigcup_{\substack{j, k \in \{1, 2, 3, 4\} \\ j \neq k}} H^{j, k} \right) \neq \mathbb{N}^4$$

gilt, weil ja Punkte mit nur einer hinreichend kleinen Komponente von dieser Vereinigung nicht erfaßt werden. Aus diesem Grund betrachten wir etwas „größere“ Teilgitter, nämlich:

$$G^i = \{x \in \mathbb{N}^n \mid x_j \geq g_j, j \neq i\} \supseteq G' \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

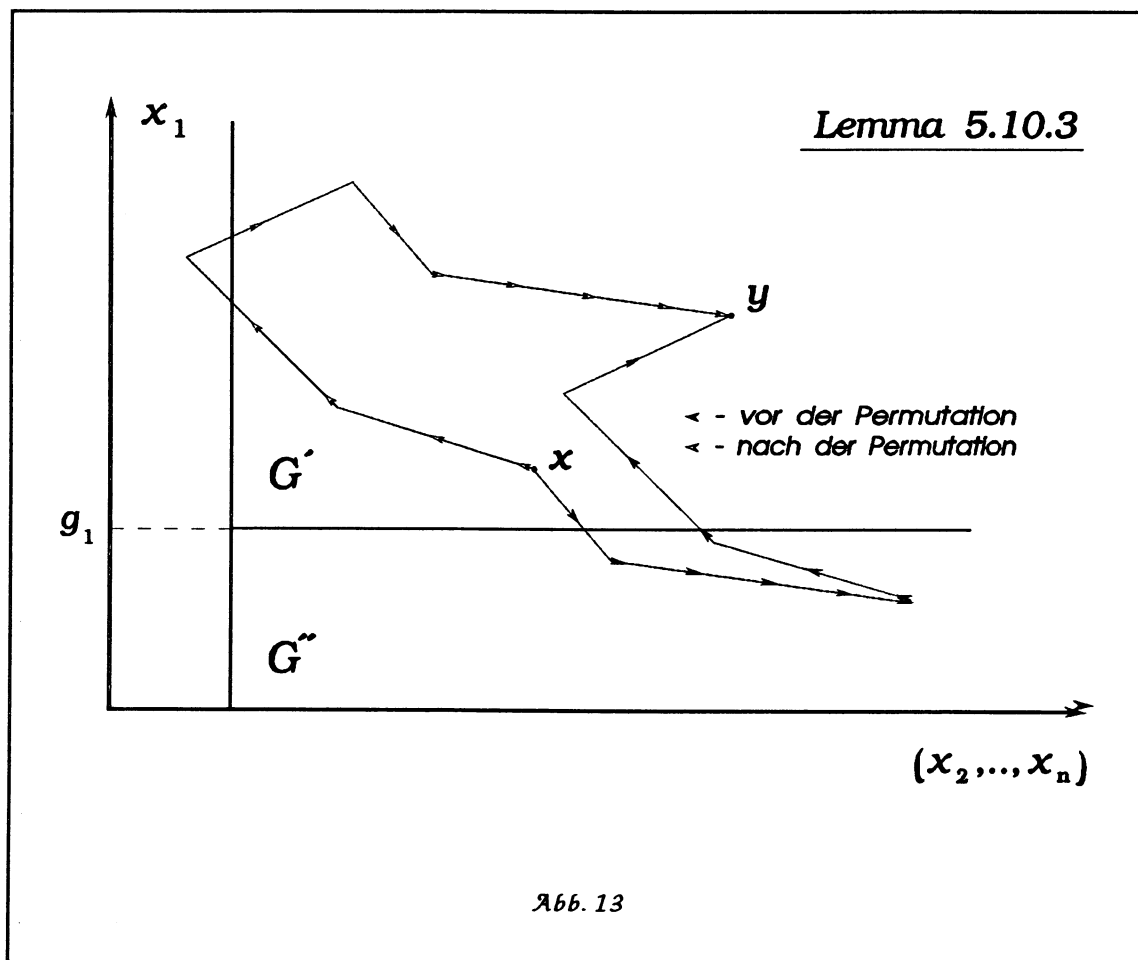
(Diese „Säulen“ können jeweils als disjunkte Vereinigungen  $G' \cup G'' = G^i$  angesehen werden, mit  $G'' = G^i \setminus G'$ ). Seien  $x, y \in G'$ . Wir analysieren Schaltpfade zwischen den beiden Punkten aus den Regionen  $G^i$  für ein gegebenes  $i$ . Nehmen wir an, daß die Stelle  $s_i$  keine Transition kontrolliert. Damit könnten wir das vorherige Korollar für dieses  $G^i$  formulieren, was der zu beweisenden Aussage aus dem Lemma 5.10 (aber nur für dieses  $G^i$ ) gleichkäme. Es wäre ja nur  $H^i = G^i$  zu setzen. Ansonsten würden Schaltpfade zwischen  $x$  und  $y$  i.a. gegen die Schaltregel für  $\mathcal{V}^n$  verstoßen, sollten sie das Teilgitter  $G''$  „betreten“, d.h. Punkte von dort beinhalten. Solche Schaltpfade wären aber mit Sicherheit zulässig (oder genauer: die Schaltfolgen, auf die sie zurückgehen) hinsichtlich aller Stellen  $s \neq s_i$ . Die Legalität dieser Schaltpfade hinsichtlich  $s_i$  versuchen wir durch geeignete Permutation der entsprechenden Schaltfolgen herzustellen. Offensichtlich erreichen wir stets die gleichen Endpunkte auf permutierten Schaltpfaden - von deren Zulässigkeit einmal abgesehen. Bis zum Ende dieses Beweises sei  $\nu$  eine für  $\mathcal{U}^n$  zulässige Schaltfolge mit  $x \rightarrow^\nu y$ .

**Lemma 5.10.3.** Jede Schaltfolge  $\nu$  kann unabhängig von  $x$  und  $y$  so permutiert werden, daß sie hinsichtlich  $s_i$  zulässig wird.

**Beweis:** Die Schaltfolge  $\nu$  zerlegen wir in zwei Teile:  $\nu^+$ , bestehend ausschließlich aus Transitionen mit  $\xi(t, s_i) \geq \xi(s_i, t)$  und  $\nu^-$  mit allen anderen Transitionen. Wir lassen zuerst alle Transitionen aus  $\nu^+$  feuern. □

Durch diese simple Permutation haben wir den Eintritt in das Teilgitter  $G''$  zwar verhindert - den Austritt aus  $G^i$  aber in Kauf nehmen müssen. Die Zulässigkeit der hier betrachteten Schaltfolgen bezüglich  $s_i$  tangiert diese u.U. bezüglich aller anderen Stellen, was nicht gerade auf ein sehr wertvolles Resultat hinzudeuten scheint. Nichtsdestotrotz ist

es unschwer zu erkennen, daß man in einigen Fällen Erfolg haben wird mit dieser Permutation. Sicherlich wird es von dem Petri-Netz selbst und der betrachteten Schaltfolge abhängen - aber auch davon, wie weit die Punkte  $x$  und  $y$  von  $g$  entfernt sind. Weiter wird man diese Permutation wohl dahingehend variieren können, daß der Austritt aus  $G^i$  entweder verhindert oder zumindest begrenzt wird, im Sinne der Entfernung von  $G^i$ . Entscheidend in diesem Zusammenhang ist die Frage, ob für jedes Petri-Netz eine solche Konstruktion möglich sein wird. Mit anderen Worten: gibt es eine Konstante  $h^i = \{h_1^i, \dots, h_n^i\}$  mit  $h_j^i \geq g_j^i$  für  $j \neq i$ , sodaß jeder  $\vee$ -Schaltpfad zwischen  $x$  und  $y$  aus  $H^i = \{z \in G^i \mid z \geq h^i\}$  auf zulässige Form permutiert werden kann? Dieser Schaltpfad dürfte dann  $H^i$  zwar verlassen - nicht aber  $G^i$ . Diese Frage wollen wir in den nachfolgenden Überlegungen klären.



Zur Erinnerung:  $G^i$  ist die Menge von Punkten, die hinreichend weit entfernt sind von allen Gitterachsen (im Sinne des Korollars 5.10.2).



bezeichnen wir als dessen Entfernung von  $G^i$ . Das Problem besteht darin, diese Entfernung für alle  $v$  und unabhängig von  $x$  und  $y$  einzuschränken. Dann brauchen wir nur noch  $G^i$  um  $\delta_v$  weiter weg von den Gitterachsen zu wählen, um die Zulässigkeit der hier relevanten Schaltfolgen zu erreichen.

Dazu betrachten wir den Grenzfall  $x = y = g$  (die Verallgemeinerung auf  $x, y$  mit  $x \geq g, y \geq g$  ist dann trivial). Sollte für alle Transitionen, die  $v^+$  zuzuordnen sind (d.h. nicht nur diejenigen, die in der betrachteten Schaltfolge vorkommen),  $\xi(t, s_j) \geq \xi(s_j, t)$  für alle  $s_j \in S$  gelten, dann könnten wir  $v^+ v^-$  feuern lassen, was auf  $\delta_v = 0$  für solche Petri-Netze hinauslaufen würde. Von diesem Spezialfall abgesehen, kommen wir jedoch nicht umhin,  $\bar{G}^i = \{z \in \mathbb{N}^n \mid z \notin G^i\}$  zu betreten. Betrachten wir eine Transition  $t^+$ , die in  $v^+$  vorkommt. Da ein Schaltpfad mit der hier vorausgesetzten Eigenschaft (d.h. mit Wiedereintritt ins  $H'$ ) möglich ist, muß es eine Transition oder eine Schaltfolge  $\tau^-$  mit Transitionen aus  $\tau^-$  in  $v^-$  geben, sodaß der Schaltpfad  $t^+ \tau^-$  einen Endpunkt aus  $G^i$  trifft. Und weil es nur endlich viele Transitionen gibt, gibt es auch nur endlich viele  $\tau^-$ , die dieses bewirken. Leider kann dieser Schaltpfad in die Region  $G''$  eindringen, was wir unbedingt vermeiden wollten. Wenn aber zuerst noch weitere Transitionen aus  $v^+$  feuern und anschließend die dazugehörigen Schaltfolgen  $\tau^-$ , dann liegt der Endpunkt u.U. in  $G^i$ . Damit der hier betrachtete  $v$ -Pfad möglich sein kann, kann es nur endlich lange und folglich endlich viele Schaltfolgen mit Transitionen aus  $v^+$  geben, die unbedingt feuern müssen, damit die dazugehörigen  $\tau^-$  den Schaltpfad wieder ins  $G^i$  führen können. Daraus können wir aber  $\delta_v$  sicherlich berechnen, weil es nur endlich viele Kantenvielfachheiten gibt.  $\square$

Obige Überlegung hat den Beweis dafür erbracht, daß die Entfernung von  $H^i$  bei der angestrebten Permutation beschränkt ist, d.h. es gibt ein  $\delta \in \mathbb{N}$  mit  $\delta = \delta_v^{\max}$ , das den gesetzten Anforderungen genügt. Sei  $h^i = \{h_1^i, \dots, h_n^i\}$  mit  $h_j^i = g_j + \delta, j \neq i$ . Die etwas schmaler gewordene Säule  $H^i$  betrachten wir hier analog zu  $G^i$  als disjunkte Vereinigung  $H' \cup H''$ . Das vorherige Lemma belegt:

$$\forall M_0 \in \text{sem}(H') \exists L \in \text{sem}(H''):$$

$$\left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^i]}(M_0) \cap H' \right) \stackrel{5.10.4}{\subseteq} L \stackrel{5.10.4}{\subseteq} \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G^i]}(M_0) \cap H' \right) \stackrel{5.10.2}{\subseteq} (\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(M_0) \cap H') \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(M_0).$$

Wir müssen nur noch klären, ob die Erreichbarkeitsmenge in  $H'' = H^i \setminus H'$  ebenfalls, wenn nicht direkt berechnet, dann wenigstens „legal“, d.h. durch eine semilineare Teilmenge der gesamten Erreichbarkeitsmenge eingehüllt werden kann. Nehmen wir an, daß die Stelle  $s_i \in S$  nur eine Transition  $t^+ \in T$  kontrolliert. Wir betrachten das Petri-Netz  $\mathcal{V}^n$  ohne diese Transition ( $\mathcal{V}^n \setminus \{t^+\}$ ), in dem trivialerweise keine Transition innerhalb von  $H^i$  kontrolliert wird. Wegen der offensichtlichen Inklusion

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n \setminus \{t^+\}}(\cdot) \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(\cdot)$$

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

sowie der Äquivalenz  $\mathcal{V}^n = \mathcal{U}^n$  in  $H^l$  können wir sicherlich schreiben:

$$\left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^l]}(M_0) \cap H'' \right) = \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^l]} \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^l]}(M_0) \cap H' \right) \cap H'' \right) = \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}^{[H^l]} \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^l]}(M_0) \cap H' \right) \cap H'' \right)$$

für alle  $M_0 \subseteq H'$ . Da wir aber weder  $\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^l]}(\cdot) \cap H'$  noch  $\mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}^{[H^l]}(\cdot)$  direkt berechnen können, dürfen wir lediglich folgern:

$$\forall M_0 \in \text{sem}(H') \quad \exists L \in \text{sem}(H^l):$$

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[H^l]}(M_0) \subseteq L \subseteq \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}^{[G^l]}(M_0) \cap H^l \right) \stackrel{5.10.2}{\subseteq} \left( \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(M_0) \cap H^l \right) \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}^n}(M_0).$$

Sicherlich ist die Fixierung der Anfangsmenge als Teilmenge von  $H'$  keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit. Denn, falls die Anfangsmenge gänzlich in  $H''$  liegt, brauchen wir nur die (semilineare) Einhüllende von

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{U}^n}^{[H^l]}(M_0) \cap H'$$

für  $M_0$  einzusetzen. Und sollte  $M_0$  die beiden Regionen überlappen, dann behandeln wir  $M_0 \cap H'$  und  $M_0 \cap H''$  dementsprechend. Damit erhalten wir die Erreichbarkeitsmenge des  $\mathcal{V}^n$  in  $H^l$  (im mehrfach genannten Sinne), allerdings vorerst nur unter der Voraussetzung, daß die Stelle  $s_j$  nur eine Transition kontrolliert. Nehmen wir aber an, daß wir das gleiche Resultat errechnen können, wenn diese Stelle  $n$  Transitionen kontrolliert. Die Erreichbarkeitsmenge in  $H'$  kennen ohnehin und die in  $H''$  könnten wir – laut Voraussetzung – unter Ausschluß einer weiteren, durch  $s_j$  kontrollierten Transition  $t_{n+1}$ , berechnen. Von Belang wäre nur noch, wo die Anfangsmenge liegt, was wir aber zuletzt durch Fallunterscheidung gemeistert haben.

Die Behauptung aus dem Lemma 5.10 folgt daher induktiv nach der Anzahl der durch  $s_j$  kontrollierten Transitionen, wobei wir Vollständigkeitshalber festhalten wollen, daß unsere Überlegung einen rekursiven Algorithmus zur Berechnung von  $L$  markiert.  $\square$

Damit haben wir das um eine Komponente abgeschwächte Pendant zum Lemma 4.6 für gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme bewiesen. Die Frage, ob unsere Beweisführung auf zwei Stellen (wie im Lemma 4.6) verallgemeinert werden kann, ist jedoch zu verneinen. Nehmen wir z.B. das Petri-Netz aus Abb. 2 und das Komponentenpaar (4,5), so stellen wir fest, daß die Stellen  $s_4$  und  $s_5$  einerseits bestimmte Transitionen kontrollieren und andererseits komplementär geschaltet sind. Eine solche Situation kann bei gewöhnlichen Vektor-Additionssystemen nicht eintreten, was die Aussage aus Lemma 4.6 verständlich erscheinen läßt. In unserem Fall können wir keine vergleichbaren Resultate gewinnen – etwa in

$\{x \in \mathbb{N}^5 \mid x \geq \alpha\}$  für ein  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  mit  $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$ . Gerade daraus resultiert die Verschiebung der Semilinearitätsgrenze. Aus Lemma 4.6 und 5.9 (für Vektor-Additionssysteme) wurde in [10] die Semilinearitätsgrenze  $n^* = 5$  hergeleitet. Da das Lemma 5.9 uneingeschränkt gilt (u.U. auch bei mehreren inhibitor-Kanten, wie das Theorem 5.5 lehrt), kann nur eine abgeschwächte Form von 4.6 gelten.

Diese Vorgehensweise ist im Hinblick auf die hier nicht geklärten Semilinearitätsgrenzen sehr zu empfehlen. Nehmen wir z.B. Vektor-Additionssysteme mit genau einer inhibitor-Kante und ohne kontrollierende Zustände. Das Lemma 5.9 gilt wegen Theorem 5.4. Zu zeigen bleibt nur noch Lemma 4.6 für diese Variante (ein guter Einstieg ist der Satz über schwach-monotone inhibitor-Transitionen, §7). Das Zusammenfügen beider Resultate kann wie in [10] verlaufen. Anders sieht es aus, wenn eine weitere inhibitor-Kante hinzukommt. Beide Teillösungen verlieren dann ihre Gültigkeit. Auf diese Fragen kommen wir noch zurück (§6).

Im weiteren Verlauf unserer Überlegungen bedienen wir uns der in [10] angewandten Beweistechnik - selbstverständlich in etwas abgeänderter Form, weil die Ausgangsbedingungen anders sind.

Das Lemma 5.10 liefert zwar ein interessantes, dimensionsunabhängiges Resultat - ist aber im Hinblick auf die zu beweisende Aussage nur im vierdimensionalen Gitter von Bedeutung. Deshalb gehen wir von der (etwas bedingten) Semilinearität und Berechenbarkeit der Petri-Netz-Erreichbarkeitsmengen in folgenden Regionen in  $\mathbb{N}^4$  aus:

$$H^{j,k} \subseteq \mathbb{N}^4 \text{ für alle } j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, j \neq k \text{ (Lemma 5.9),}$$

$$H^i \subseteq \mathbb{N}^4 \text{ für alle } i \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ (Lemma 5.10).}$$

Im zweiten Teil des „divide & conquer“-Verfahrens kombinieren wir diese Teillösungen zu einer globalen Lösung, nämlich im gesamten  $\mathbb{N}^4$ . Seien:

$$H^{(*)} = \bigcup_{1 \leq j \leq 4} H^j \text{ und } H^{(**)} = \bigcup_{\substack{1 \leq j, k \leq 4 \\ j \neq k}} H^{j,k}.$$

Das Lemma 5.9 gilt für alle  $h_j, h_k \in \mathbb{N}$  und deshalb können wir durch geeignete Wahl dieser Konstanten dafür sorgen, daß die (nichtdisjunkte) Vereinigung von  $H^{(*)}$  und  $H^{(**)}$  bereits  $\mathbb{N}^4$  ergibt. Betrachten wir weiter den Durchschnitt  $H^{j,k} \cap H^{k,l}$  für  $j \neq k \neq l \neq j$ . Dieses Gitter besteht offensichtlich aus endlich vielen eindimensionalen Gittern  $\tilde{h}_\nu$ , die parallel zueinander und zu einer Gitterachse liegen. Gleiches gilt sicherlich für:

$$D = \bigcup_{\substack{1 \leq j, k, l \leq 4 \\ j \neq k \neq l \neq j}} (H^{j,k} \cap H^{k,l}).$$

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

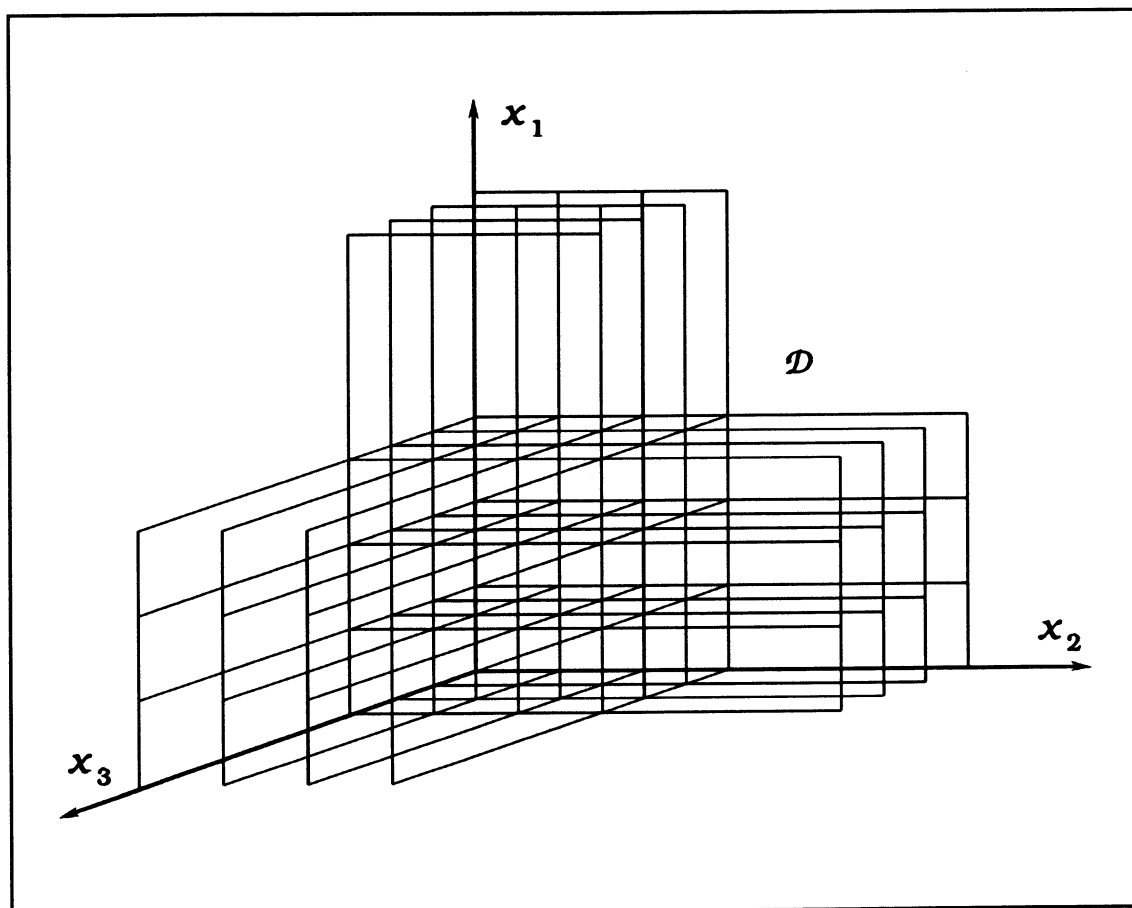
Es ist klar, daß dieser Sachverhalt von essentieller Bedeutung für uns ist (denken wir doch an das Lemma 4.1). Nicht ganz unproblematisch ist jedoch die Frage, wann ein Schaltpfad eine „Linie“  $\tilde{h}_\nu \in D$  durchkreuzt. Deshalb brauchen wir eine etwas andere Menge, nämlich:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{N}^4 \mid x \rightarrow^t y, t \in T, x \in H^{l,l}, y \in H^{k,l}, H^{l,l} \neq H^{k,l}\},$$

für die sicherlich ebenfalls gilt:

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \tilde{h}_i \text{ für ein } m \in \mathbb{N}. \text{ (Es ist } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D} \text{).}$$

**Bemerkung:** Die nachfolgende Abbildung zeigt diese "Linien" im dreidimensionalen Raum, wobei klar ist, daß in diesem Raum die Semilinearität sofort folgt, falls sie hinreichend weit von allen Achsen gegeben ist. Zum Schluß dieses Kapitels kommen wir noch darauf zurück (Lemma 5.15) und attestieren eine weitere, dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze.



## ALGORITHMUS A3

```

input ( $M_0, \mathcal{V}, \{H^{j,k}, H^j \mid 1 \leq j, k \leq 4\}$ );      /*  $M_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^4)$ ,  $\mathcal{V}$ -ein gewöhnliches
Vektor-Ersetzungssystem der Dimension
 $n = 4$ , sowie die zuvor fixierte Aufteilung
von  $\mathbb{N}^4$ . */
begin      /* Die Grundstruktur ist ein direkter, azyklischer Graph (Baum).
Jeder Knoten beinhaltet eine Menge  $\text{set}(\cdot) \subseteq \mathbb{N}^4$  und eine Mar-
kierung  $\text{tag}(\cdot) \in \{\text{open}, \text{closed}\}$ , sowie Verweise auf den Vor-
gänger und den (die) Nachfolger. */

1) let  $\text{set}(\text{root}) = M_0$ ;  $\text{tag}(\text{root}) = \text{open}$ ;      /* root hat keine Vorgänger */
2) on pick leaf:  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{open}$ ; if not exists go e;      /* leaf hat keine
Nachfolger */
3) if  $\text{set}(\text{leaf}) \subseteq H^{j,k}$       /*  $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, j \neq k$  */
4)   begin
5)     let  $M = \text{set}(\text{leaf}) \cup \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}^{[H^{j,k}]}(\text{set}(\text{leaf}))$ ;      /* Lemma 5.9 */
6)     let  $M = M \cup \text{shift}(M)$ ;      /*  $\text{shift}(M) = \{x \mid y \rightarrow^t x, y \in M, t \in T\}$  */
7)     for each ( $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) do
8)       create succ;
          let leaf  $\xrightarrow{\text{next}}$  succ,  $\text{set}(\text{succ}) = M \cap H^j$ ,  $\text{tag}(\text{succ}) = \text{open}$ ;
          /* succ wird direkter Nachfolger von leaf */
9)     end;
10)  if  $\text{set}(\text{leaf}) \subseteq H^j$       /*  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  */
11)  begin
12)    if  $\exists \text{ancestor}(\text{leaf}) \subseteq H^j$  let  $\text{tag}(\text{leaf}) = \text{closed}$ ; go on;
        /* gemeint ist ein nicht unbedingt direkter Vorgänger */
13)    let  $M = \text{set}(\text{leaf}) \cup L^j$ ;      /*  $L^j \supseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}^{[H^j]}(\text{set}(\text{leaf}))$ , Lemma 5.10 */
14)    let  $M = M \cup \text{shift}(M)$ ;
15)    for each ( $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, j \neq k$ ) do
16)      create succ;
          let leaf  $\xrightarrow{\text{next}}$  succ,  $\text{set}(\text{succ}) = M \cap H^{j,k}$ ,  $\text{tag}(\text{succ}) = \text{open}$ ;
17)    end;
18)  go on;
19) e output ( $L = \bigcup_{\text{nodes}} \text{set}(\text{leaf})$ );      /*  $L \supseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}^{\circ}(M_0)$  */
end.

```

## 95. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

Ein Schaltpfad, der von einem Gitter  $H^{l,j}$  direkt in ein effektiv anderes Gitter  $H^{k,l}$  hineinläuft, enthält offenbar einen Punkt aus  $\mathcal{D}$ . Erfolgt dieser Übertritt nur indirekt, d.h. auf dem Umweg über  $H^{l^*1}$ , dann ist dies nicht mehr zwingend. Über Schaltpfade mit einem Punkt aus  $\mathfrak{h}_\nu \in H^{l,j}$  und mit dem unmittelbar nächsten Punkt aus einer effektiv anderen Region  $H^{k,l}$  sagen wir, daß sie  $\mathfrak{h}_\nu$  (und damit auch  $\mathcal{D}$ ) durchkreuzen. Nennen wir solche Schaltpfade  $\beta$ -Pfade - im Gegensatz zu  $\alpha$ -Pfadern, die  $\mathcal{D}$  überhaupt nicht durchkreuzen. Die zu beweisende Behauptung (Theorem 5.14) folgt induktiv nach  $m$ , der Anzahl der  $\mathfrak{h}_\nu$ , aus denen sich die Menge  $\mathcal{D}$  zusammensetzt. Der Induktionsschluß ist allerdings nur unter der Voraussetzung möglich (dann aber auch trivial), wenn die „einhüllende Semilinearität“ für alle  $\beta$ -Pfade gezeigt werden kann, d.h. Schaltpfade, die u.U. alle Linien aus  $\mathcal{D}$  durchkreuzen. Auch hier gehen wir den induktiven Weg, nämlich nach  $\mu: 0 \leq \mu \leq m$ , der Anzahl der durch  $\beta$ -Pfade durchkreuzten Linien  $\mathfrak{h}_\nu \in \mathcal{D}$ . Insofern sind das zwei ineinander verkeilte Induktionen. Wir beginnen mit  $\mu = 0$ , den  $\alpha$ -Pfadern also. (Die im nachfolgenden Algorithmus errechnete Menge kann natürlich auch Punkte enthalten, die auf  $\beta$ -Pfadern erreichbar sind. Dieser Sachverhalt geht auf das Lemma 5.10 zurück, das Schaltpfade aus dem Teilgitter  $G^1$  und nicht ausschließlich aus  $H^1$  zuläßt.)

**Lemma 5.11.** Der Algorithmus  $\mathfrak{A}3$  berechnet (stets in endlicher Zeit) eine Menge aus  $sem(N^4)$  für alle (gewöhnliche) Vektor-Ersetzungssysteme der Dimension  $n = 4$  und alle Anfangsmengen  $M_0 \in sem(N^4)$ . Diese Menge enthält alle auf  $\alpha$ -Pfadern erreichbaren Punkte aus  $N^4$ , andererseits aber nur Punkte aus der Erreichbarkeitsmenge von  $\mathcal{V}$ .

**Beweis:** Als erstes beobachten wir, daß alle Knoten in dem erzeugten Baum ausschließlich Mengen enthalten, die gänzlich entweder in einem Teilgitter  $H^1$  oder in  $H^{1,k}$  enthalten sind. Wir können wir o.B.d.A. annehmen, daß auch die Anfangsmenge  $M_0$  in einer solchen Region liegt. Da in den Zeilen <sup>8)</sup> und <sup>16)</sup> auch nur Mengen mit dieser Eigenschaft hinzukommen, folgt unsere Behauptung induktiv nach der Länge des (Baum-) Pfades. Die gleiche Induktion zeigt darüberhinaus, daß diese Mengen stets semilinear sind, denn in Zeile <sup>1)</sup> haben wir eine semilineare Anfangsmenge (Induktionsanfang), in Zeilen <sup>5)</sup> und <sup>13)</sup> vereinigen wir eine (laut Induktionsvoraussetzung) semilineare Menge mit stets semilinearen Mengen (entsprechend Lemma 5.9 und 5.10) und darüberhinaus ist die Semilinearität invariant unter den in den Zeilen <sup>6)</sup>, <sup>8)</sup>, <sup>14)</sup>, <sup>16)</sup> vorgenommenen Operationen. Ferner ist der Baum stets endlich, weil auf jedem Pfad ein Blatt mit  $set(leaf) \subseteq H^1$  nicht unendlich oft auftauchen kann (ein solcher Pfad wird in Zeile <sup>12)</sup> „geschlossen“) und Blätter mit  $set(leaf) \subseteq H^{1,k}$  zwischen Blättern vom Typ  $H^1$  liegen müssen. Folglich wird in Zeile <sup>19)</sup> eine endliche Vereinigung von semilinearen Mengen ausgegeben. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß diese Menge alle auf  $\alpha$ -Pfadern erreichbaren Punkte enthält. Dazu betrachten wir einen solchen Schaltpfad mit zwei aufeinanderfolgenden Punkten  $x_j, x_{j+1}$  und  $x_j \in set(leaf)$  für ein Blatt aus dem errechneten Baum. Nehmen wir an, daß für dieses Blatt  $tag(leaf) = closed$  gilt. Dann gilt sicherlich  $set(leaf) \subseteq H^1$  für ein  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  und es gibt einen Vorgänger  $leaf^*$  von  $leaf$  in diesem Baum mit  $set(leaf^*)$  aus der gleichen Region und  $tag(leaf^*) = open$ . Sei  $x_k \in set(leaf^*)$  mit  $x_k \rightarrow^{set^*} x_j$ . Dann gilt aber  $x_j \in set(leaf^*)$  und deshalb nehmen wir einfach an:  $tag(leaf) = open$ . Liegt  $x_{j+1}$  in der gleichen Region, wie  $x_j$ , dann gilt offensichtlich  $x_{j+1} \in set(leaf)$ . Andernfalls gilt entweder

$$x_{j+1} \in (\text{set}(\text{leaf}) \cup \text{shift}(\text{set}(\text{leaf}))) \cap H^l \text{ oder}$$

$$x_{j+1} \in (\text{set}(\text{leaf}) \cup \text{shift}(\text{set}(\text{leaf}))) \cap H^{l+k}.$$

Die Söhne von  $\text{leaf}$  beinhalten aber beide Mengen, was den Induktionsschritt nach der Länge des betrachteten  $\alpha$ -Pfades liefert.  $\square$

Die Induktionsvoraussetzung bezieht sich primär auf Schaltpfade, die höchstens  $\mu < m$  Linien aus  $\mathcal{D}$  durchkreuzen. Der Algorithmus, dessen Existenz vorausgesetzt werden soll, trifft dennoch auch andere Punkte und zwar nach wie vor aus dem Grund, daß wir nicht die Erreichbarkeitsmengen selbst, sondern deren Überdeckungen berechnen können. Deshalb muß unsere Induktionsvoraussetzung lauten:

**Induktionsvoraussetzung: (5.12)** Die Erreichbarkeitsmengen der vierdimensionalen und gewöhnlichen Vektor-Ersetzungssysteme auf Schaltpfaden, die höchstens  $\mu$  Linien ( $\bar{h}$ ) aus  $\mathcal{D}$  durchkreuzen, können immer durch semilineare und effektiv berechenbare Mengen von erreichbaren Punkten eingehüllt werden.  $\square$

**Lemma 5.13.** Unter der Voraussetzung 5.12 gilt: Die Erreichbarkeitsmengen der vierdimensionalen und gewöhnlichen Vektor-Ersetzungssysteme auf Schaltpfaden, die höchstens  $\mu + 1$  Linien aus  $\mathcal{D}$  durchkreuzen, können immer durch semilineare und effektiv berechenbare Mengen eingehüllt werden.

**Beweis:** Daß diese Mengen vorerst nicht direkt berechnet werden, sollte uns nicht weiter stören. Spätestens bei  $\mu = m$  ist dieser Sachverhalt belanglos. Ferner wissen wir, daß der Algorithmus  $\mathfrak{A}3$  keine Punkte treffen kann, die in dem gegebenen Vektor-Ersetzungssystem nicht erreichbar wären (die Operationen  $\mathfrak{R}^{G^{(l)}}$ ,  $\mathfrak{R}^{G^{(l,k)}}$ ,  $\text{shift}$  treffen nur einwandfrei erreichbare Punkte). Auch diese Behauptung wird also aus diesem Induktionsschritt folgen. Die Induktion nach  $m$  ist dann trivial und zusammen mit dem Spezialfall  $\mu = m$  erhalten wir die im Theorem 5.14 aufgestellte Behauptung. Seien  $\mathcal{D}^\mu = \{\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_\mu\}$  und  $\mathcal{D}^{\mu+1} = \mathcal{D}^\mu \cup \{\bar{h}_0\}$  mit paarweise verschiedenen Elementen  $\bar{h}_\nu$ . Die Linie  $\bar{h}_0$  (wie alle anderen auch) ist ein wohlgeordnetes, eindimensionales Gitter, das laut Lemma 4.1 nur endlich viele Linear-komponenten enthalten kann. Eine abwechselnde Anwendung von (5.12), was semilineare Mengen liefert, sowie Translationen ( $\text{shift}$ ), die das Durchkreuzen von  $\bar{h}_0$  simulieren, kommt deshalb in endlicher Zeit zum Stillstand und liefert eine semilineare Menge.  $\square$

**Theorem 5.14.** Die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für gewöhnliche Vektor-Ersetzungssysteme ohne kontrollierende Zustände beträgt  $n^* = 4$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_\nu(M_0) \in \text{sem}(\mathbb{N}^4) \text{ für alle } M_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^4).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar.  $\square$

## §5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN

Unsere Beweisführung liefert nahezu automatisch noch ein weiteres Resultat, nämlich die Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen von dreidimensionalen Petri-Netzen ohne kontrollierende Zustände, allerdings (wegen Theorem 5.7) mit höchstens einer inhibitor-Stelle. Offensichtlich sind sowohl inhibitor-Kanten, als auch kontrollierende Stellen in  $H = \{x \in \mathbb{N}^3 \mid x \geq \alpha\}$  für ein  $\alpha \in \mathbb{N}^3$  ohne Bedeutung und es besteht folglich Äquivalenz zu einem dreidimensionalen Vektor-Additionssystem in dieser Region. Das wiederum ist gleichbedeutend mit der Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen in  $H$  (gerade das ist nicht mehr zutreffend, wenn noch zusätzlich kontrollierende Zustände vorhanden sind) und zusammen mit dem Lemma 5.9, das durch nur eine inhibitor-Stelle offensichtlich nicht tangiert wird, erhalten wir wieder unsere Teillösungen in

$$H^i = \{x \in \mathbb{N}^3 \mid x_i \leq \alpha_i\} \text{ für } 1 \leq i \leq 3, \text{ sowie in } H,$$

für die sicherlich gilt (bei geeigneter Wahl von  $\alpha$ ):

$$H^1 \cup H^2 \cup H^3 \cup H = \mathbb{N}^3.$$

Diese Resultate können wir sicherlich genauso verwenden, wie im letzten Beweis (die letzte Abbildung zeigt exakt die Menge  $\mathcal{D}$  in  $\mathbb{N}^3$ ). Deshalb:

**Lemma 5.15.** Für Petri-Netze ohne kontrollierende Zustände mit höchstens einer inhibitor-Stelle gilt:  $n^* \geq 3$  □

Dieses Lemma verschärft zwar etwas unsere Aussagen über Vektor-Additionssysteme mit inhibitor-Vektoren - liefert jedoch keine exakten Semilinearitätsgrenzen (auf diese Fragen kommen wir im letzten Kapitel (§7) zurück). Für Vektor-Ersetzungssysteme gilt jedoch wegen Lemma 4.4 mehr:

**Theorem 5.16.** Die dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenze für Vektor-Ersetzungssysteme mit genau einem inhibitor-Vektor und ohne kontrollierende Zustände (auch für Petri-Netze mit beliebig vielen inhibitor-Kanten, aber mit nur einer inhibitor-Stelle) beträgt  $n^* = 3$ . Es gilt:

$$\mathfrak{R}_{\nu}(M_0) \in \text{sem}(\mathbb{N}^3) \text{ für alle } M_0 \in \text{sem}(\mathbb{N}^3).$$

Diese Erreichbarkeitsmengen sind effektiv berechenbar. □

**§5. DIMENSIONSBEZOGENE SEMILINEARITÄTSGRENZEN**

---

## §6. WPNC-BERECHENBARKEIT, ZÄHLERAUTOMATEN

*Im vorangegangenen Paragraphen haben wir u.a. die Auswirkungen von inhibitor-Kanten auf dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenzen studiert – mit dem etwas überraschenden Ergebnis, daß kontrollierende Zustände in dieser Hinsicht wirkungsvoller sind. Dennoch sind die inhibitor-Kanten ein Mittel, das qualitativ mehr ermöglicht, als nur das Basismodell. Das belegt z.B. die Unentscheidbarkeit des Erreichbarkeitsproblems, kann aber auch im Zusammenhang mit der Simulation von Berechnungsvorgängen beobachtet werden. Wir beginnen mit einer partiellen Vorstellung des durch Rabin angedachten Konzeptes der WPNC-Berechenbarkeit.*

**Definition 6.1.** *Sei  $\mathcal{P}$  ein Petri-Netz mit einer Stellenmenge, die aus folgenden, paarweise disjunkten Teilmengen besteht:*

$$S = \{o\} \cup \{s\} \cup X \cup R \text{ mit } X = \{x_1, \dots, x_n\}, R = \{r_1, \dots, r_k\}.$$

*Ferner gelte für alle Transitionen  $t \in T$ :  $\xi(o, t) = 0$  und  $\xi(t, x_j) = 0$  für alle  $x_j \in X$ , sowie  $\xi(t, s) \geq \xi(s, t)$ .  $\mathcal{P}$  mit einer Initialmarkierung  $m_I(R) = (m_I(r_1), \dots, m_I(r_k))$  ist ein schwacher Petri-Netz-Computer für eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $D \subseteq \mathbb{N}^n$  (kurz: ein  $m_I(R)$ -WPNC für  $f$ ), wenn für alle Anfangsmarkierungen  $m_o(S) \in \mathbb{N}^{n+k+2}$  mit  $m_o(R) = m_I(R)$ ,  $m_o(s) = 1$ ,  $m_o(o) = 0$  und  $m_o(X) \in D$  gilt:*

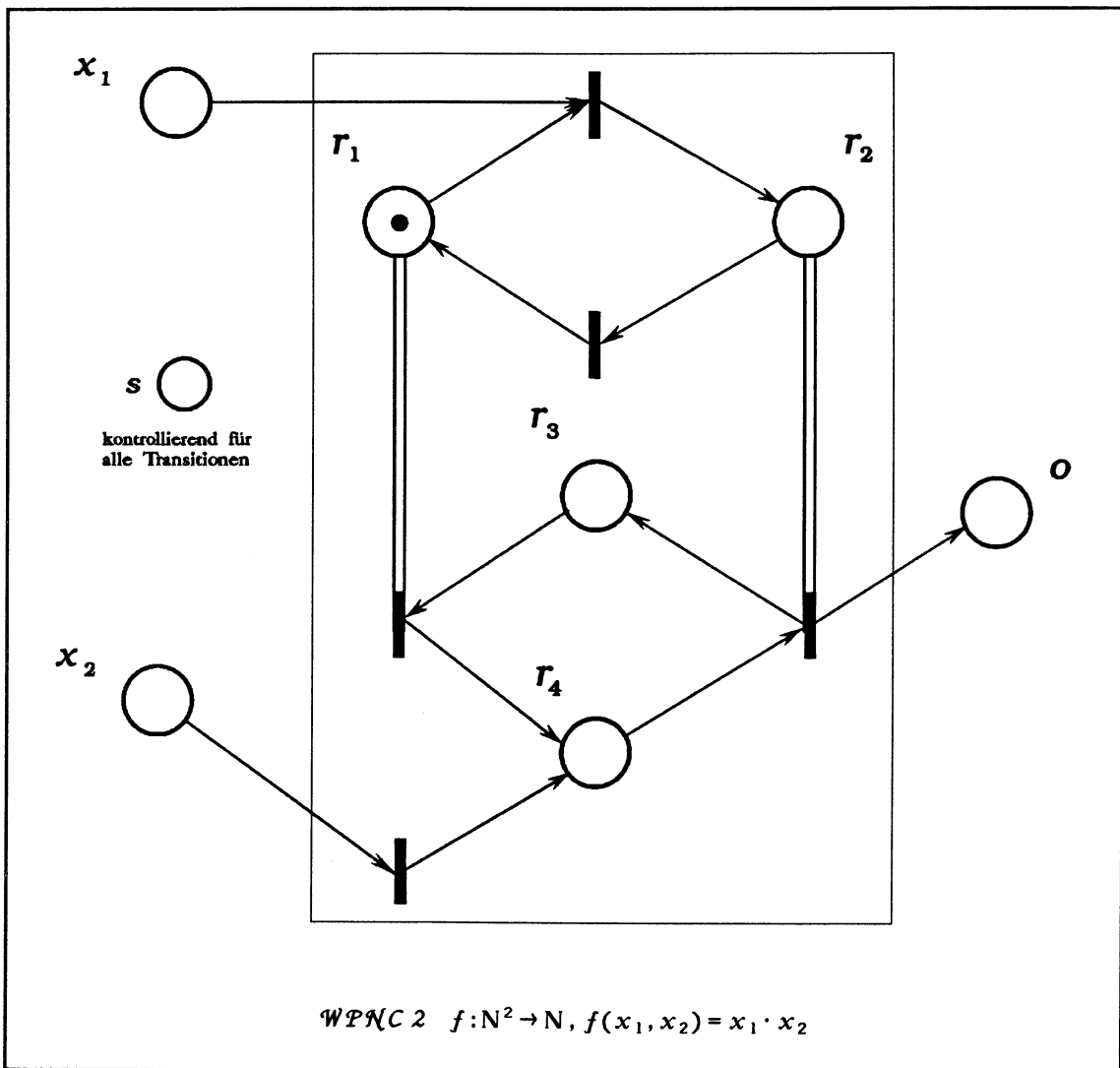
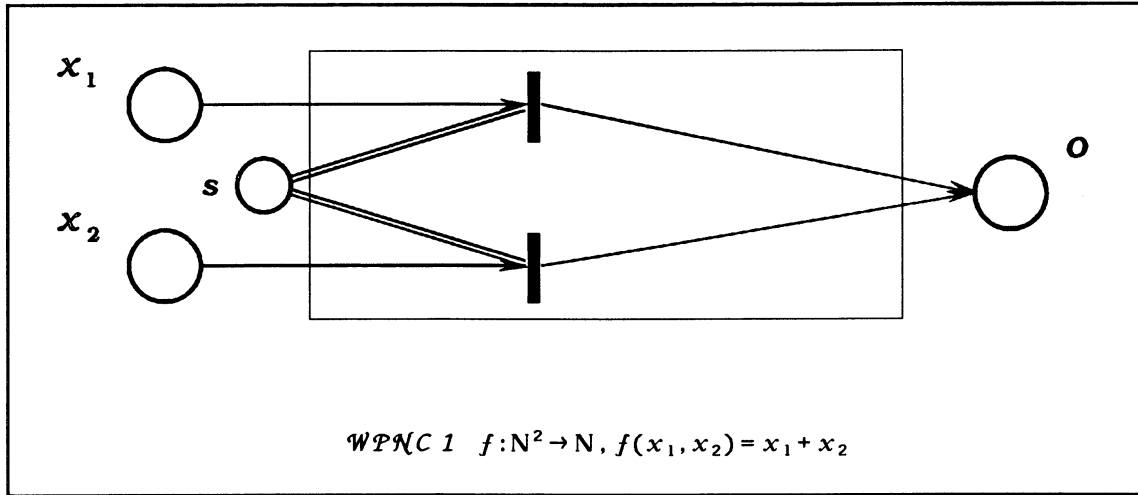
$$\{[\mathfrak{R}_{\mathcal{P}}(m_o(S))] \downarrow_{m(X)-o}\} \downarrow_o = \{0, 1, \dots, f(m_o(X))\}.$$

*Existiert ein  $m_I(R)$ -WPNC für eine Funktion  $f$ , dann ist diese Funktion WPNC-berechenbar.*

*Die Stelle  $s$  ist eine Art „Handbremse“ und kontrolliert meistens alle Transitionen. Wird sie mit einem Token belegt, so kann der Berechnungsvorgang beginnen. Es muß natürlich für die entsprechende Initialmarkierung der inneren Stellen, sowie eine Input-Markierung gesorgt sein. Die Ausgabestelle  $o$  darf nicht größer werden als  $f(x)$ . Andererseits muß  $m(o) = f(x)$  unbedingt erreichbar sein.*

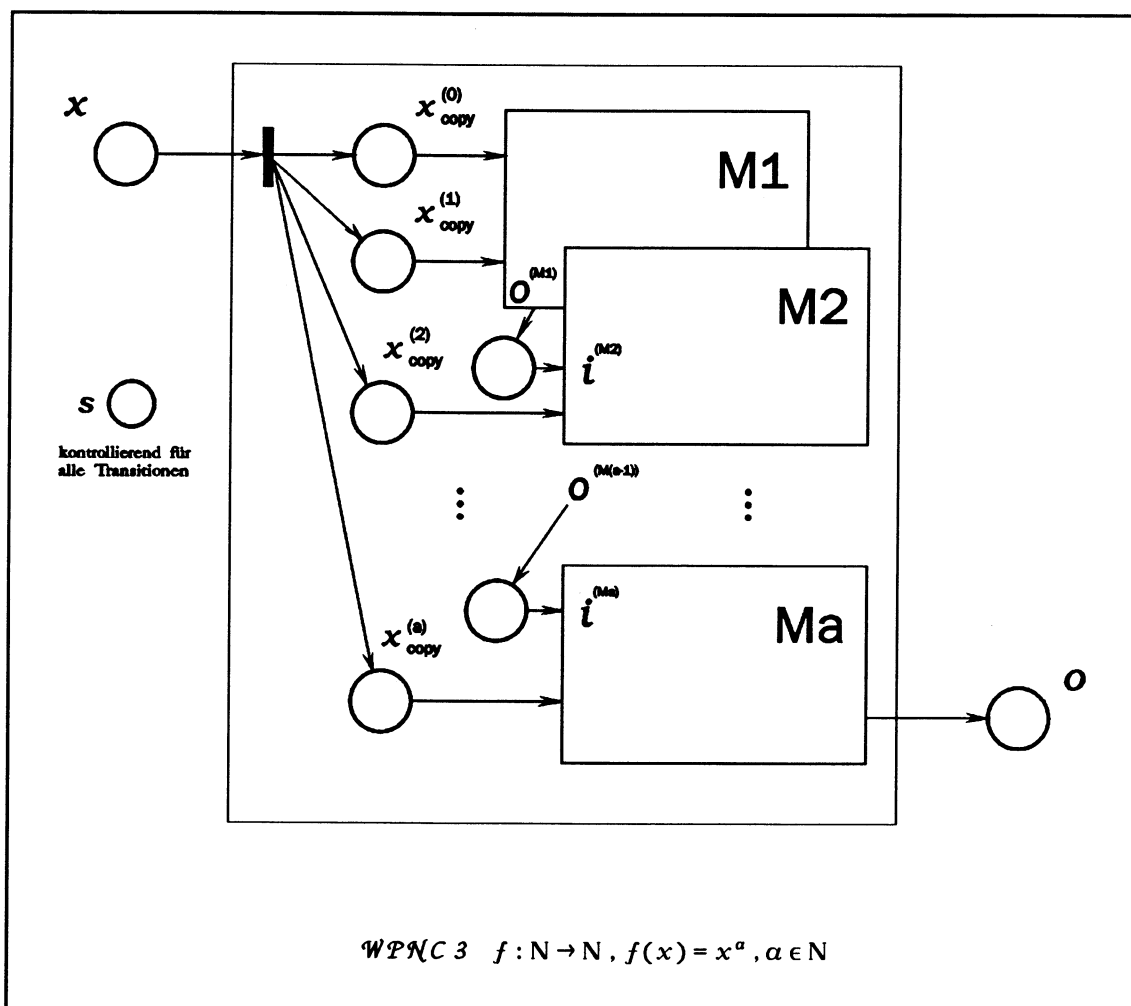
*Wir wenden uns den ersten Beispielen zu. Besonders einfach ist der Addierer (WPNC 1), der keine inneren Stellen besitzt. Der Multiplizierer (WPNC 2) dagegen benötigt vier solche Stellen und unbedingt eine bestimmte Initialmarkierung (hier:  $m_I(R) = (1, 0, 0, 0)$ ). Die Korrektheitsbeweise überlassen wir dem Leser mit dem Verweis auf [18],[27].*

§6. WPNC-BERECHENBARKEIT. ZÄHLERAUTOMATEN.



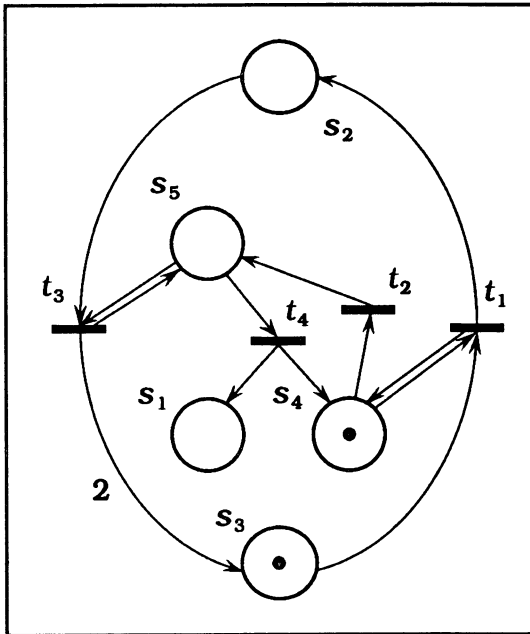
## 96. WPNC-BERECHENBARKEIT. ZÄHLERAUTOMATEN.

Die WPNC-Berechenbarkeit der Addition und Multiplikation liefert sofort einen Petri-Netz-Computer für Polynome, d.h.  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x) = x^\alpha$  für ein  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Eine mögliche (wenn auch nicht die kompakteste) Konstruktion ist die  $\alpha$ -fache Kaskade von Multiplizierern (WPNC 3). Die Eingabe wird auf Stellen kopiert, die jeweils den zweiten Operanden für entsprechende Sektionen liefern. Die erste Sektion multipliziert die Eingabe mit sich selbst und liefert den ersten Operanden an die zweite Sektion. Diese wiederum multipliziert (höchstens)  $x^2$  mit  $x$ , usw.



Durch geeignete Kombination der bisher diskutierten Gebilde können sogar Polynome berechnet werden. Eine kompaktere Konstruktion findet der Leser in [18].

Um den Zusammenhang zwischen nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen und der WPNC-Berechenbarkeit hinreichend schwieriger Funktionen zu beleuchten, berechnen wir die Exponentialfunktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x) = \alpha^x$  für ein  $\alpha \in \mathbb{N}$  (im Beispiel zur Basis 2),



mit Hilfe des Petri-Netzes aus Abb. 2. Laut Lemma 4.4, zusammen mit den Erkenntnissen aus dem §3 (gegenseitige Simulierbarkeit der Petri-Netze aus den Beispielen Abb. 2 und Abb. 4), sind alle Markierungen mit

$$m(s_2) + \frac{m(s_3)}{2} \leq 2^{m(s_1)}$$

erreichbar und nur solche Markierungen. Folglich können die Stellen  $s_2$  und  $s_3$  nur so groß werden, wie es die  $s_1$  erlaubt. Schließen wir die Input-Stelle an die Transition  $t_4$  an, so wird stets gelten:

$$m(s_2) + \frac{m(s_3)}{2} \leq 2^x.$$

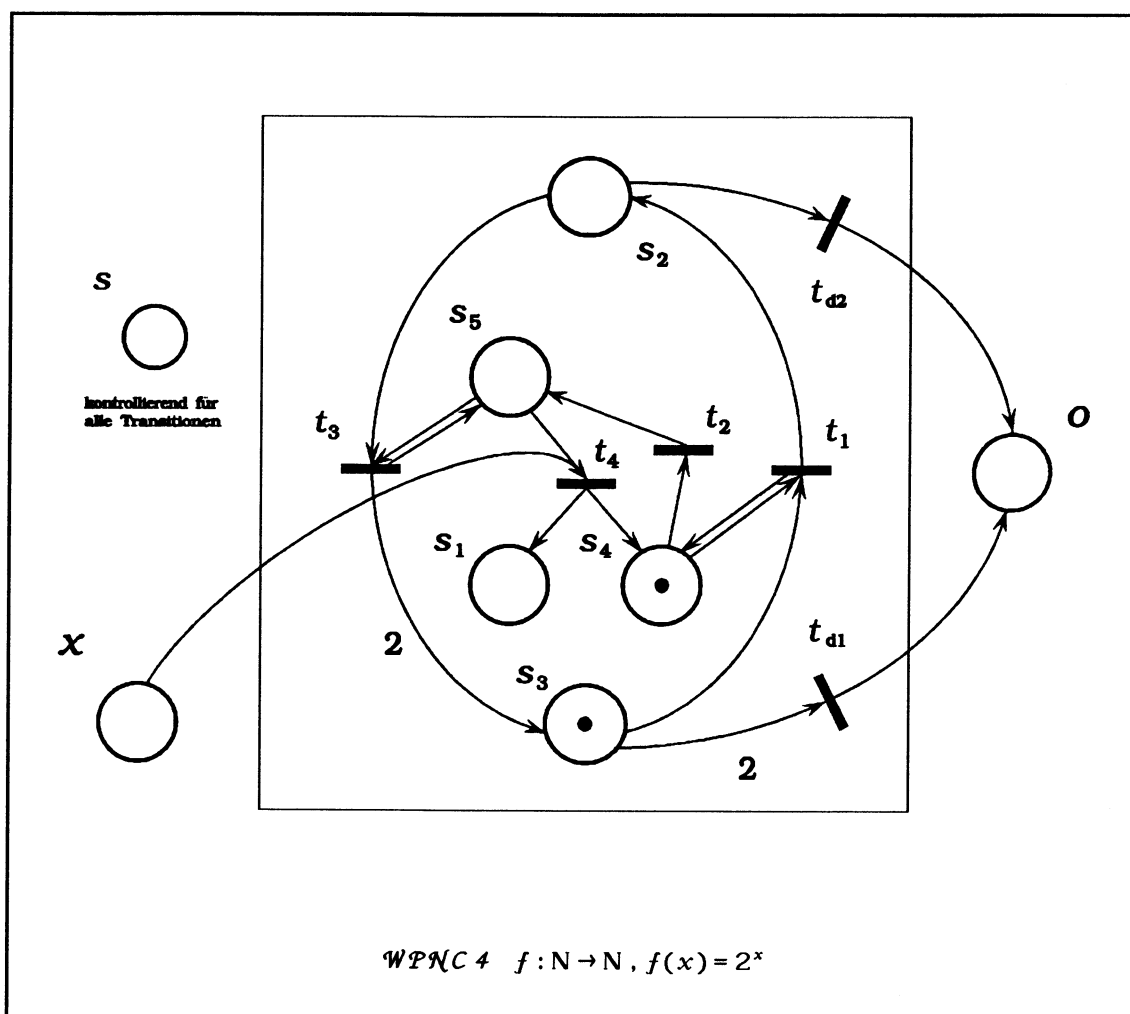
Das Ergebnis ist dann den Stellen  $s_2$  und  $s_3$ , unter Berücksichtigung der notwendigen Halbierung von  $m(s_3)$  zu entnehmen. Diese Halbierung, wie überhaupt Division durch Konstanten, ist durch geeignete Kantenvielfachheiten problemlos realisierbar. Damit haben wir bewiesen, daß WPNC 4 die Funktion  $f(x) = 2^x$  korrekt berechnet.

Immer wieder machen wir die Erfahrung, daß sogar ein starkes Wachstum von Funktionen keine unlösbaren Probleme bei der Berechnung im Sinne der Definition 6.1 bereitet. Sogar so stark wachsende Funktionen, wie die Ackermann-Funktion, sind WPNC-berechenbar.<sup>1</sup>

All diese Funktionen haben allerdings eines gemeinsam: sie sind nämlich monoton wachsend. Diese Eigenschaft begünstigt natürlich die WPNC-Berechenbarkeit, weil ja unsere Definition das „Herantasten an  $f(x)$  von unten“ ausdrücklich gestattet. Aber gerade dieser Umstand läßt Schwierigkeiten bei der Berechnung von anderen Funktionen vermuten. Nehmen wir z.B. das boolesche „NOT“. Diese sehr einfache, aber eben nicht monoton wachsende Funktion ist nicht WPNC-berechenbar. Das liegt einfach an der Natur der gewöhnlichen Petri-Netze. Zwar haben wir im §3 festgestellt, daß das „Testen auf  $\leq$ “ u.U. simulierbar ist (z.B. durch komplementäre Stellen), aber das würde die Initialmarkierung von der Eingabe abhängig machen. Bei einer festen Initialmarkierung, wie in der Definition 6.1 gefordert, erreichen wir jeden Punkt aus  $\mathfrak{X}(m_0)$  erst recht bei einer Anfangsmarkierung, die größer ist als  $m_0$ . Folglich ist „NOT“ nicht WPNC-berechenbar.

<sup>1</sup> Realisierung von Rekursionen - siehe [18].

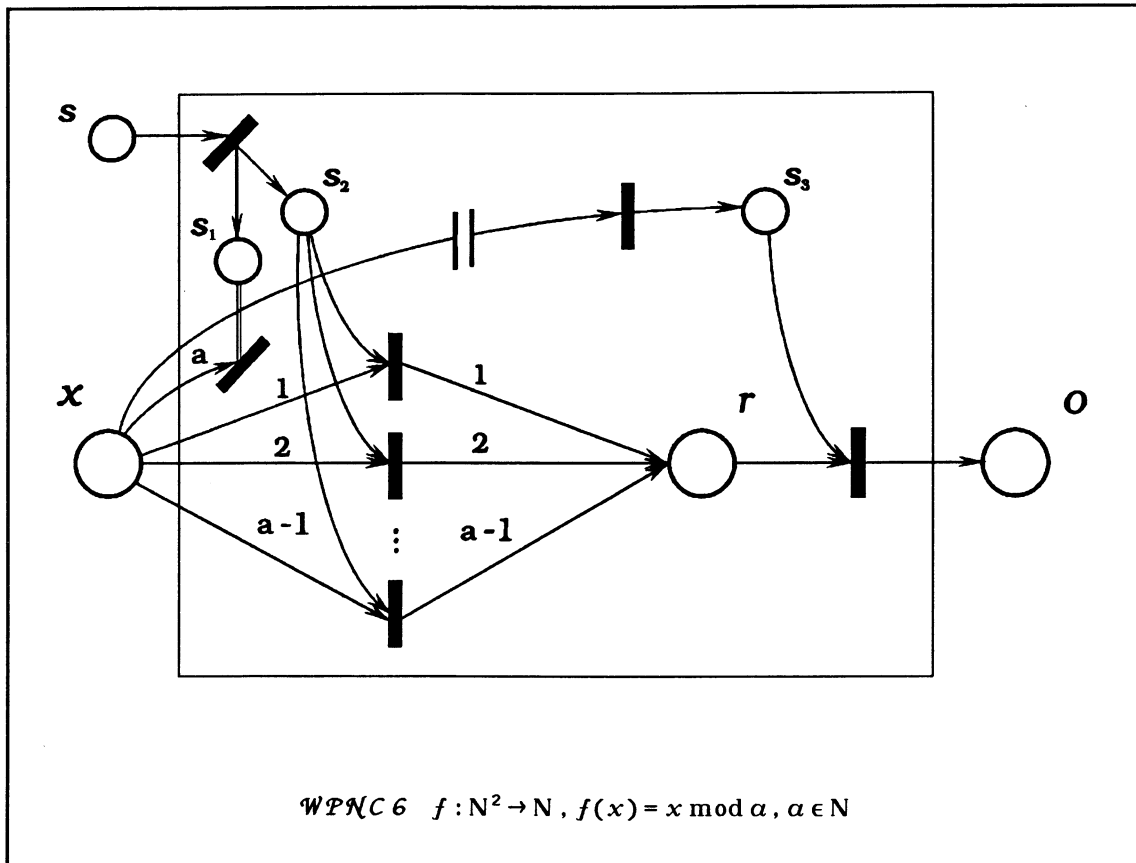
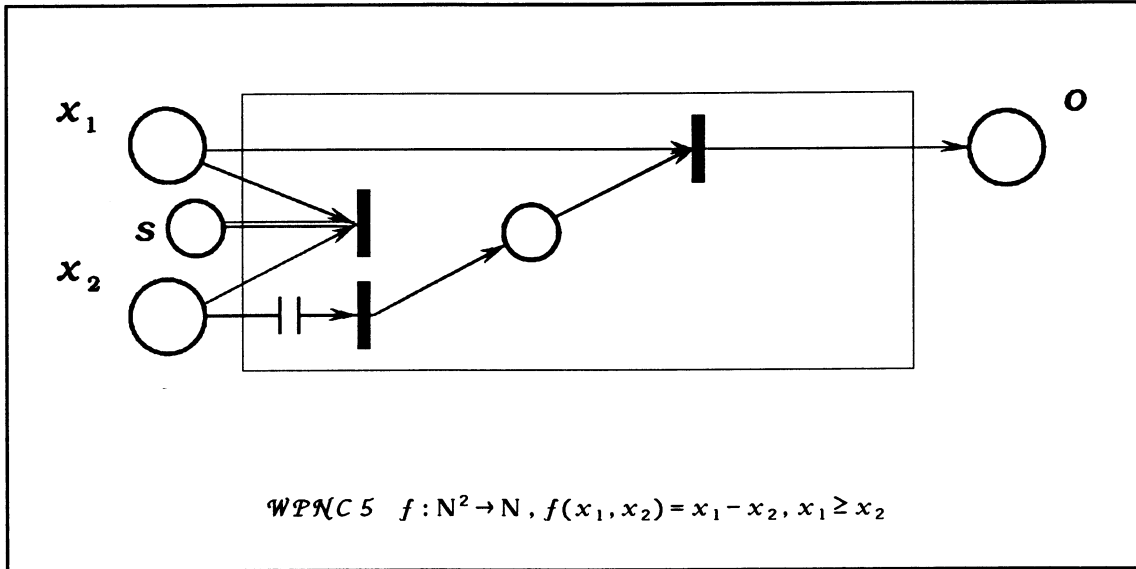
## S6. WPNC-BERECHENBARKEIT. ZÄHLERAUTOMATEN.



Diese Überlegung lassen wir als Beweis für die nicht-Berechenbarkeit (auf der Basis der gewöhnlichen Petri-Netze) verschiedener Funktionen gelten. So sind z.B. Subtraktion, Division und Modulo-Division aus dem gleichen Grund nicht WPNC-berechenbar. Diese Funktionen sind mindestens in einem ihrer Argumente nicht wachsend. Zwei inhibitor-Kanten dürften da Abhilfe schaffen (wo sie doch sogar Turing-Maschinen simulieren können). Eine andere Frage ist, ob bereits eine einzelne inhibitor-Kante die ansonsten nicht gegebene Berechenbarkeit impliziert. Sicherlich ist das beim „NOT“ der Fall. Aber auch die Subtraktion realisieren wir problemlos mit Hilfe von WPNC 5.

Problematisch ist die Modulo-Division, die hinsichtlich beider Argumente die notwendige Monotonie vermissen läßt. Höchstwahrscheinlich sind hier zwei inhibitor-Kanten erforderlich, weil jede solche Kante nur eine Stelle auf 0 testen kann. Auf solche Funktionen wollen wir hier nicht näher eingehen. Stattdessen untersuchen wir die Modulo-Division zu einer konstanten Basis ( $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x \bmod a$  für ein  $a \in \mathbb{N}$ ), die offensichtlich nicht

§6. WPNC-BERECHENBARKEIT. ZÄHLERAUTOMATEN.



§6. WPNC-BERECHENBARKEIT. ZÄHLERAUTOMATEN.

WPNC-berechenbar ist. Auch diese Funktion können wir unter Zuhilfenahme einer inhibitor-Kante berechnen. In WPNC 6 kann die Input-Stelle nur dann leer werden, wenn die innere Stelle  $r$  exakt  $f(x) = x \bmod a$  Token enthält, die nur in diesem Falle auf  $o$  transferiert werden können.

Funktionen, die in nur einem ihrer Argumente nicht wachsend sind, konnten wir bislang mit Hilfe genau einer inhibitor-Kante berechnen. Trifft das aber auf alle solche Funktionen zu, d.h. sind sie alle - sagen wir - WPNC<sup>11</sup>- berechenbar?<sup>2</sup> Die ganzzahlige Division  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x_1, x_2) = \lfloor x_1 / x_2 \rfloor$  scheint dem zu widersprechen. Hier können wir aus verständlichem Grund nicht mehr so vorgehen, wie bei der Modulo-Division. Auf diese und andere offene Fragen werden wir in der abschließenden Diskussion ausführlich eingehen. Die nachfolgenden Überlegungen, die sich mehr auf die Anzahl der Stellen hinsichtlich oberer Schranken beziehen, hängen ebenfalls mit diesen Fragen zusammen, wie wir gleich sehen werden. Zuvor wollen wir aber unbedingt festhalten, was die Subtraktion und Modulo-Division belegen, nämlich die folgende doppelte Inklusion zwischen Klassen von Funktionen, die durch WPNC's mit oder ohne inhibitor-Kanten berechenbar sind:

$$\text{WPNC} \subset \text{WPNC}^{11} \subset \text{WPNC}^{21}.$$

Auf den Einsatz von kontrollierenden Zuständen in WPNC's haben wir bislang verzichtet - aus Gründen der Übersichtlichkeit. Interessant wäre nun zu überlegen, inwieweit die bislang vorgestellten WPNC's kompaktiert werden könnten, falls man auf kontrollierende Zustände zurückgreifen würde. Diese können nichts an der Berechenbarkeit einer gegebenen Funktion ändern - egal, ob im Sinne einer der Klassen aus der obigen Relation oder im Sinne der WPNC-Berechenbarkeit überhaupt (Lemma 3.2, §3). Die Frage, ob alle Funktionen WPNC-berechenbar sind, werden wir im folgenden ebenfalls diskutieren, wobei noch näher zu präzisieren bleibt, was hier unter „allen“ Funktionen zu verstehen ist. Wir beschränken uns auf einargumentige und berechenbare Funktionen. Sei also:

$$\mathcal{F} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ algorithmisch berechenbar}\}$$

Resultate, die für unsere Überlegungen wertvoll sind, finden wir vor allem in der Arbeit von Barsdin [30], die sich auf ein anderes, mit Petri-Netzen jedoch verwandtes Maschinenmodell bezieht. Es handelt sich um sog. Zählerautomaten (auch Minsky-Maschinen). Das in [30] diskutierte Spezialmodell (o.B.d.A.) dieser Maschinen wollen wir nun vorstellen.

**Definition 6.2.** Ein  $n$ -Band Zählerautomat  $\mathcal{CM}^n$  ist ein Tupel  $\mathcal{CM}^n = (Q, \chi)$  mit einer endlichen Menge von Zuständen  $Q = \{q_1, \dots, q_m\}$  und einer Abbildung  $\chi: (Q \times \mathbb{N}^n) \rightarrow (Q \times \mathbb{Z}^n)$  mit der Eigenschaft:

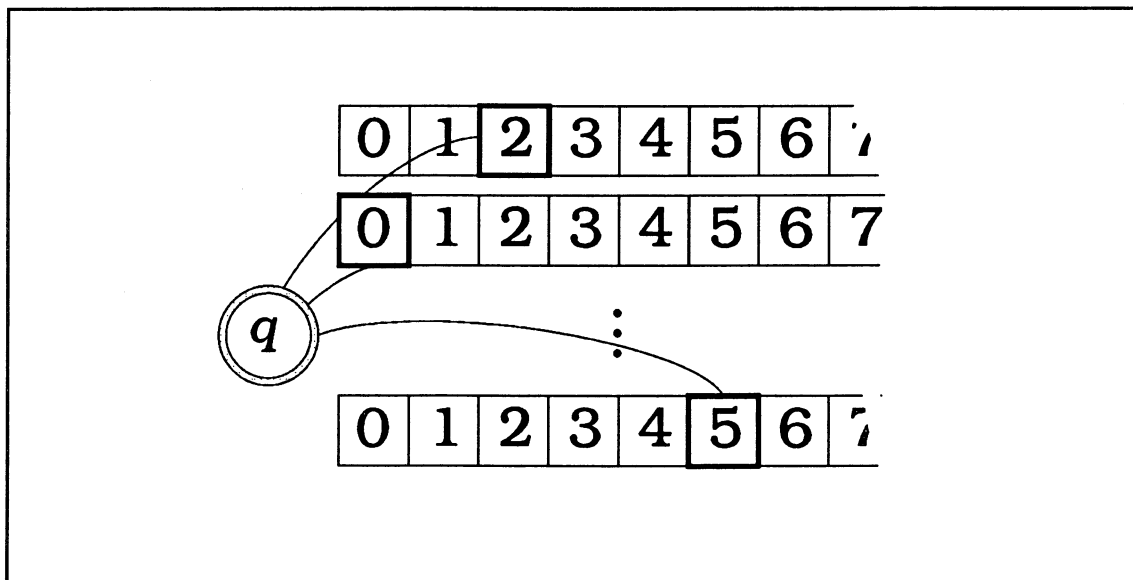
---

<sup>2</sup> Selbstverständlich können hier nur Funktionen gemeint sein, die überhaupt (algorithmisch) berechenbar sind.

$$\forall x, x' \in \mathbb{N}^n, q_j \in Q: \chi(q_j, x) = \chi(q_j, x')$$

$$\text{falls } \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i = 0\} = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x'_i = 0\}.$$

Ob die Äquivalenz von Zählerautomaten zu einer bestimmten Klasse von Petri-Netzen besteht (zu Vektor-Additionssystemen mit inhibitor-Vektoren und kontrollierenden Zuständen etwa), werden wir später untersuchen. Zunächst aber wollen wir uns die Frage stellen, ob dieses Gebilde als eine Art Turing-Maschine aufgefaßt werden kann. Die Theorie von Mehrband-Turing-Maschinen wird als bekannt vorausgesetzt. Die Abbildung  $\chi$  können wir sicherlich als eine Bewegungs- und gleichzeitig Zustandsüberföhrungsfunktion ansehen. Zwar sieht das Grundkonzept von Minsky ein beliebiges Bandalphabet vor - die Berechnungsschritte sind aber ohnehin nur von der Position der Leseköpfe (deshalb auch Zählerköpfe genannt) und von dem vorliegenden Zustand abhängig. Deswegen folgen wir hier der Idee von Barsdin [30] und gehen davon aus, daß die (unveränderbaren) Inhalte der einseitig begrenzten Bänder als die Position der entsprechenden Sektoren interpretiert werden. Folglich nehmen wir o.B.d.A. an, daß die Sektoren auf jedem Band mit Null beginnend durchnummeriert sind, wie unten dargestellt. Die andere Eigenart einer solchen Turing-Maschine besteht darin, daß der vorliegende Zustand zu jedem Zeitpunkt für alle Zählerköpfe gilt. Weiter einigen wir uns darauf, daß ein Bandüberlauf nicht zulässig ist, was der Natur von Petri-Netzen entspricht.



Ein Zählerautomat ist also eine Turing-Maschine, sicherlich eine deterministische, was an der Abbildung  $\chi$  liegt. Dieser Determinismus wirft allerdings ein anderes Problem auf. Wir können zwar jeden Zählerautomaten durch ein Petri-Netz mit inhibitor-Kanten

simulieren, aber nicht umgekehrt. Die bei Petri-Netzen vorstellbare Situation, wo zwei und mehr Transitionen gleichzeitig aktiviert sind, würde bei den Zählerautomaten bedeuten, daß für eine Konfiguration  $(x, q)$  die Nachfolgekonfiguration nicht eindeutig bestimmt wäre, was auf Nichtdeterminismus hinauslaufen würde. Halten wir aber fest, daß Zählerautomaten zu sog. single-path Petri-Netzen (mit inhibitor-Kanten und kontrollierenden Zuständen) äquivalent sind, d.h. solchen, bei denen höchstens eine Transition aktiviert sein kann.<sup>3</sup>

**Definition 6.3.** Eine Funktion  $f \in F$ ,  $f: N \supseteq D \rightarrow N$  ist  $CM^{\Omega}$ -berechenbar, wenn es einen Zählerautomaten  $CM^{\Omega}$  gibt, der für alle Anfangskonfigurationen  $(x, 0, \dots, 0, q_0)$ ,  $x \in D$ ,  $q_0 \in Q$  immer in endlicher Zeit und in der Endkonfiguration  $(0, \dots, 0, f(x), q)$  hält, für ein  $q \in Q$ .

**Theorem 6.1.** Jede Funktion  $f \in F$  ist  $CM^{\Omega}$ -berechenbar. (Minsky), [30]<sup>4</sup>  $\square$

Die ohnehin abgeschwächte (da lediglich nicht-reflexive) Relation zwischen Petri-Netzen und Zählerautomaten ist auf Zählerautomaten und WPNC's, und damit auch auf WPNC<sup>k</sup>- und  $CM^{\Omega}$ -Berechenbarkeit, nicht übertragbar. Wir müßten noch zusätzlich sicherstellen, daß ein ausgewählter Zählerkopf den zu berechnenden Funktionswert nicht überschreitet. Deshalb sind wir kaum in der Lage, bekannte Resultate auf das jeweils andere Gebilde (oder die andere Art der Berechenbarkeit) zu verallgemeinern.

Auf noch größere Probleme stoßen wir beim Versuch, die Semilinearität der Petri-Netz-Erreichbarkeitsmengen auf Zählerautomaten zu übertragen. Letztere halten ja in endlicher Zeit, wenn sie denn eine Funktion aus  $F$  berechnen sollten. Deshalb wollen wir die Linearität aus dem nachfolgenden Theorem nicht mit der Semilinearität gleichsetzen. Trotzdem darf anhand der bislang erzielten Resultate (§5) zumindest vermutet werden, daß eine noch effizientere Berechenbarkeit von Funktionen aus  $F$  eher nicht zu erwarten ist - allenfalls für Funktionen, die eben eine gewisse „Linearität“ aufweisen. Barsdin gelang es, diese Eigenschaft genauer anzugeben:

**Theorem 6.2.** Für jede  $CM^{\Omega}$ -berechenbare Funktion  $f \in F$  existieren Konstanten  $\phi, \omega \in N$  mit der Eigenschaft:  $\rightarrow$

<sup>3</sup> Die Abbildung  $\chi$  läßt zwar kontrollierende Stellen nicht zu - wohl aber rückgekoppelte inhibitor-Transitionen. Man könnte folglich die Zählerautomaten als Vektor-Additionssysteme mit rückgekoppelten inhibitor-Transitionen (und kontrollierenden Zuständen) bezeichnen. Diese "Rückkopplungen" fallen jedoch wegen Lemma 3.1 überhaupt nicht ins Gewicht.

<sup>4</sup> Bereits aus dem Resultat von Lambek [a] (erzielt in einem anderen Zusammenhang), kann die  $CM^{\Omega}$ -Berechenbarkeit von allen Funktionen  $f \in F$  gefolgert werden. Der Bedarf an Bändern ist allerdings hier nicht herleitbar. Diese Folgerung ermöglicht erst das Resultat von Minsky [b]. Siehe dazu [30].

[a] Lambek, Joachim, "How to program an infinite abacus", Canad. Math. Bull., 1964, 4, Nr. 3.

[b] Minsky, Marvin, "Recursive unsolvability of Post's problem of Tag and other topics in theory of Turing machines", Annals of Mathem., 1961, 74, Nr. 3.

$$f(x + m\omega) = f(x) + m\phi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Barsdin}), [30] \quad \square$$

Die Minsky-Barsdin Theoreme sind sicherlich sehr wertvolle Resultate, deren Konsequenzen für Petri-Netze (und vor allem für WPNC's) interessant sind. Es sei allerdings ausdrücklich betont, daß es sich hier lediglich um wettbewerbsfreie Petri-Netze handelt und um eine Eigenschaft, die nicht gleichbedeutend ist mit der Semilinearität der Erreichbarkeitsmengen. Deshalb sind die Theoreme 5.4 und 5.5 allemal stärker, als jede direkte Folgerung aus 6.1 und 6.2.

Im nachfolgenden Korollar beschäftigen wir uns mit den härtesten Funktionen  $f \in \mathcal{F}$  hinsichtlich der  $\text{CM}^n$ -Berechenbarkeit. Aufgrund der fehlenden Äquivalenz zwischen WPNC's und Zählerautomaten können wir kaum brauchbare Aussagen über WPNC-Komplexität von  $\mathcal{F}$  machen. Deshalb:

**Korollar 6.3.** Es gibt Funktionen aus  $\mathcal{F}$ , die mit Hilfe von zweidimensionalen WPNC's (mit inhibitor-Kanten und kontrollierenden Zuständen) nicht berechenbar sind. □

Damit hätten wir geklärt, wie die Kompaktierung von WPNC's durch kontrollierende Zustände aussehen und vor allem, wie wirksam sie sein kann. Der Schluß auf die Dimension von WPNC's ohne kontrollierende Zustände ist wegen Lemma 3.3 trivial. Allerdings ist damit noch nichts über die Anzahl der Transitionen, insbesondere der inhibitor-Kanten gesagt. Ferner resultiert aus der  $\text{CM}^n$ -Berechenbarkeit einer gegebenen Funktion lediglich die untere Schranke für den kompaktesten WPNC (mit inhibitor-Kanten und kontrollierenden Zuständen), der sie berechnet. Auf diese Fragen kommen wir im nächsten und zugleich letzten Kapitel dieser Arbeit zurück.

---

## §7. OFFENE FRAGEN. DISKUSSION.

*Die abschließende Diskussion beginnen wir mit den zuletzt gemachten Beobachtungen hinsichtlich der WPNC-Berechenbarkeit. Die echten Inklusionen zwischen den Klassen WPNC, WPNC<sup>1</sup> und WPNC<sup>2</sup> sind sicherlich ein elegantes Resultat, das letzten Endes das belegt, was wir längst vermutet haben - nämlich, daß die inhibitor-Kanten (und eine einzelne ebenfalls) eine qualitative Verstärkung des Grundmodells darstellen. Dennoch drängen sich dabei einige Fragen auf. Die erste Frage wirft die ganzzahlige Division auf, die nur in einem ihrer Argumente fallend ist und trotzdem nicht WPNC<sup>1</sup>-berechenbar zu sein scheint. Der Beweis für  $[\cdot / \cdot] \notin \text{WPNC}^1$  könnte uns dem bislang unbekanntem Kriterium für die Zugehörigkeit von Funktionen zu den entsprechenden WPNC-Klassen näher bringen. Letzteres ist wohl die wichtigste offene Frage in diesem Zusammenhang. Ein schwaches Kriterium haben wir im letzten Kapitel kennengelernt und zum Teil erfolgreich angewandt:*

$$\left. \begin{array}{l} \text{Anzahl der} \\ \text{inhibitor-Kanten} \end{array} \right\} \geq \left\{ \begin{array}{l} \text{Anzahl der Argumente, in denen} \\ \text{die Funktion nicht wachsend ist.} \end{array} \right.$$

*Das Beispiel der ganzzahligen Division (und auch z.B. der Modulo-Division zur variablen Basis:  $x \bmod y \notin \text{WPNC}^2$ ?) zeigt jedoch, daß dieses Kriterium nicht das exakte sein kann. Aber auch einargumentige Funktionen werfen einige offene Probleme auf. Die Minsky-Barsdin Theoreme (§6) definieren klar den dimensionsbezogenen Rahmen in Petri-Netzen, die wir als wettbewerbsfrei bezeichnet haben. Diese Eigenschaft könnte sich als hilfreich erweisen, wenn mehr bekannt wäre über obere Schranken z.B. hinsichtlich der kontrollierenden Zustände in den relevanten Zählerautomaten. Die zu erwartenden Resultate, die auf diesem Wege gewonnen werden könnten, blieben dennoch wahrscheinlich weit unterhalb dessen, was die Erfahrungen aus dem vorherigen Kapitel vermuten lassen. Die dort betrachteten Funktionen  $f \in \mathcal{F}$  vermochten wir ja in WPNC's mit nur einer inhibitor-Kante zu berechnen.*

*Die Theoreme 5.4 und 5.5 (§5) belegen, daß die inhibitor-Kanten die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen nur geringfügig verschieben. Auf der anderen Seite zeigt das Theorem 5.14 (zusammen mit dem Lemma 4.4), daß bereits genau eine inhibitor-Kante eine solche Verschiebung verursacht. Dieser Umstand würde eher auf die Unentscheidbarkeit des bislang offenen Erreichbarkeitsproblems für Petri-Netze mit genau einer inhibitor-Kante hindeuten. Allerdings sollen wir diese Deutung nicht überbewerten - nicht zuletzt angesichts der Tatsache, daß kontrollierende Zustände viel wirksamer sind in dieser Hinsicht. Letzteres exakt zu beweisen, würde mit Sicherheit sehr aufwendige Überlegungen (wie z.B. die Theoreme 5.4 und 5.14) erforderlich machen. Auf der anderen*

Seite läßt das Theorem 5.4 vermuten, daß die dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen für Petri-Netze ohne kontrollierende Zustände auf die Simulierbarkeit eines gewissen, in jeder Hinsicht „minimalen“ Netzes mit kontrollierenden Zuständen hinauslaufen. Diese These wird wohl kaum direkt beweisbar sein. Sie wird vielmehr aus den dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen für alle Grundmodell-Varianten folgen. Wir werden sehen, daß recht beachtliche Aussagen in Anlehnung an diese These möglich sind, und deshalb wollen wir sie hier möglichst stark untermauern.

Zunächst müssen wir uns die Frage stellen, welche Petri-Netze (mit kontrollierenden Zuständen und nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen) die einfachsten sind im Hinblick auf eine eventuelle Simulation. Ist vielleicht das Petri-Netz aus dem Beispiel Abb. 5 ein solch einfaches Petri-Netz (mit weniger als zwei inhibitor-Kanten)? Diese Frage werden wir exakt beantworten können. Was ist dann aber die Konsequenz daraus? Nehmen wir an, daß die Simulation der kontrollierenden Zustände aus diesem Beispiel mit Hilfe von verfügbaren Mitteln (bestimmter Anzahl der zusätzlichen Stellen, sowie inhibitor-Kanten) nachweislich nicht möglich ist. Sind die Erreichbarkeitsmengen der zusätzlichen Stellen beschränkt (oder beschränken wir deren Aufnahmekapazitäten willkürlich), dann simulieren diese ein einfacheres Netz, als das einfachste mit nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen. Trifft das nicht zu, dann kann man daraus - beweistheoretisch gesehen - noch nicht auf die Semilinearität schließen. Allerdings liegt diese Vermutung nahe - nicht zuletzt wegen Lemma 4.6 und der „Neigung“ der Petri-Netze zur Semilinearität, wenn hinreichend viele Stellen gleichzeitig beliebig groß werden können (inhibitor-Kanten sind in diesen Regionen ohnehin bedeutungslos). Dieses setzen wir voraus, wobei hier auch andere Formulierungen für den gleichen Sachverhalt denkbar sind.

Auf diese These aufbauend zeigen wir, daß das Petri-Netz aus Abb. 5 in jeder Hinsicht das einfachste mit nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen ist. Zunächst beobachten wir, daß mindestens zwei kontrollierende Zustände erforderlich sind, denn gerade das besagt unsere These. Eine zweite 0-Transition (die erste reine Zustandsüberföhrungstransition ist die  $t_2$ ) würde die kontrollierenden Zustände überflüssig machen. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß sämtliche Transitionenbeschriftungen, die unser Petri-Netz beinhaltet, auch erforderlich sind. Im Hinblick auf die Simulation nämlich, sind nur diese von Belang. Fehlt eine Transition mit  $q_j \rightarrow q_j$ , dann können wir den Zustand  $q_j$  umgehen. Das Fehlen einer Transition mit  $q_j \rightarrow q_k$ ,  $j \neq k$  macht wiederum den letzten unerreichbar, es sei den, der Anfangspunkt beinhaltet gerade diesen Zustand. Dann aber können wir die Erreichbarkeitsmenge in diesem Zustand (semilinear laut unserer These) als Anfangsmenge für das Netz, das nur in dem anderen Zustand schaltet, nehmen. Das heißt aber, daß hinsichtlich der Art und Anzahl der Transitionen (und laut Lemma 5.1 auch hinsichtlich der Dimension) dieses Netz das am einfachsten zu simulierende ist (mit eben nicht-semilinearen Erreichbarkeitsmengen). Damit wäre die Frage der dimensionsbezogenen Semilinearitätsgrenzen auf die Simulierbarkeit des Petri-Netzes aus Abb. 5, oder eines anderen mit den gleichartigen Transitionenbeschriftungen reduziert. Entscheidend ist dabei nicht nur die obige These, sondern auch das Theorem 5.4.

## §7. OFFENE FRAGEN. DISKUSSION.

Die Folgerungen sowie die bislang erzielten Resultate (§5) stellen wir tabellarisch zusammen, wobei die Semilinearitätsgrenzen, die aufgrund unserer These gewonnen wurden, unter Vorbehalt zu stellen und daher mit einem Fragezeichen versehen sind. Die Fragen der Simulierbarkeit, die zu diesen Erkenntnissen geführt haben, überlassen wir dem Leser.

<i>Gebilde</i>	inhibitor-Kanten. inhibitor-Stellen.	Semilinearitätsgrenze. Referenz.
<i>Vektor-Additions-/Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen</i>	$\iota = 0$ $\sigma = 0$	$n^* = 2$ <i>Lemma 5.3, Abb. 5</i>
<i>Vektor-Additions-/Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen</i>	$\iota = 1$ $\sigma = 1$	$n^* = 2$ <i>Theorem 5.4, Abb. 5</i>
<i>Vektor-Additions-/Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen</i>	$\iota \geq 2$ $\sigma = 1$	$n^* = 2$ <i>Theorem 5.5, Abb. 5</i>
<i>Vektor-Additions-/Ersetzungssysteme mit kontrollierenden Zuständen</i>	$\iota \geq 2$ $\sigma \geq 2$	$n^* = 1$ <i>Theorem 5.6, Abb. 9</i>
<i>Vektor-Additionssysteme ohne kontrollierende Zustände</i>	$\iota = 0$ $\sigma = 0$	$n^* = 5$ <i>Lemma 5.2, Anh. A</i>
<i>Vektor-Additionssysteme ohne kontrollierende Zustände</i>	$\iota \geq 1$ $\sigma = 1$	$n^* = 5^?$ ( $3 \leq n^* \leq 5$ ) <i>Lemma 5.15, Anh. A</i>
<i>Vektor-Additionssysteme ohne kontrollierende Zustände</i>	$\iota \geq 2$ $\sigma \geq 2$	$n^* = 4^?$ ( $1 \leq n^* \leq 4$ ) <i>Theorem 5.6, Abb. 10</i>
<i>Vektor-Ersetzungssysteme ohne kontrollierende Zustände</i>	$\iota = 0$ $\sigma = 0$	$n^* = 4$ <i>Theorem 5.14, Abb. 2</i>
<i>Vektor-Ersetzungssysteme ohne kontrollierende Zustände</i>	$\iota \geq 1$ $\sigma = 1$	$n^* = 3$ <i>Theorem 5.16, Abb. 4</i>
<i>Vektor-Ersetzungssysteme ohne kontrollierende Zustände</i>	$\iota \geq 1$ $\sigma \geq 2$	$n^* = 3^?$ ( $1 \leq n^* \leq 3$ ) <i>Theorem 5.6, Abb. 4</i>

Das wohl wichtigste und leider nach wie vor offene Problem bleibt das Erreichbarkeitsproblem für Petri-Netze mit genau einer inhibitor-Kante. Wir machen abschließend eine Aussage, die möglicherweise zu einer Teillösung dieses Problems führen kann, die aber gleichzeitig ein interessantes, dimensionsunabhängiges Resultat im Hinblick auf die Semilinearität liefert.

**Definition 7.1.** Eine inhibitor-Transition  $t'$  in einem Petri-Netz mit  $(PN^*)$  ist schwach-monoton, wenn entweder  $\xi(s, t') \in \{1, 0\}$  oder  $\xi(t', s) = 0$  für alle  $s \in S$  gilt. Für die Transitionen (Additionsvektoren), die auf eine solche Transition zurückgehen, gilt dann entweder  $v' \geq 0$  oder  $v' \leq 0$ .

**Theorem 7.1.** Sei  $\mathcal{V}$  ein Vektor-Additionssystem mit (genau) einem und schwach-monotonen inhibitor-Vektor  $v'$ , sowie der inhibitor-Hyperebene  $s_{t'} = 0$ , und seien  $\mathcal{U}, \mathcal{W}$  weitere Vektor-Additionssysteme, mit:

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} \setminus \{v'\},^1$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{V} \setminus \{v'\} \cup \{v''\} \text{ mit } v'' = v' + 0.^2$$

$$\text{Es gilt: } \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}(x_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{U}}(\mathfrak{R}_{\mathcal{W}}(\mathfrak{R}_{\mathcal{U}}(x_0))|_{s_{t'}=0}).$$

**Beweis:** Offensichtlich gilt:

$$(*) \quad \mathfrak{R}_{\mathcal{U}}(\cdot) \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}(\cdot) \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{W}}(\cdot).$$

Betrachten wir einen Schaltpfad in  $\mathcal{W}$  zwischen zwei Punkten aus der inhibitor-Hyperebene. Ist die inhibitor-Transition  $v' \in \mathcal{V}$  schwach-positiv, dann könnte sie zuerst feuern (genauso oft, wie in dem Schaltpfad in  $\mathcal{V}$ ) und die restlichen Transitionen danach, in unveränderter Reihenfolge. Umgekehrt, könnte eine schwach-negative Transition zuletzt feuern, nachdem die restlichen Transitionen bereits gefeuert haben. Wir beobachten also, daß unzulässige Schaltpfade u.U. so permutiert werden können, daß sie zulässig werden. Ein permutierter Schaltpfad trifft sicherlich den gleichen Endpunkt und daraus folgt:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{W}}(\cdot)|_{s_{t'}=0} \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}(\cdot)|_{s_{t'}=0}.$$

Zusammen mit (\*) erhalten wir sogar:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{W}}(\cdot)|_{s_{t'}=0} = \mathfrak{R}_{\mathcal{V}}(\cdot)|_{s_{t'}=0}.$$

Folglich gilt für jeden Anfangspunkt  $x_0$  aus der inhibitor-Hyperebene:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{V}}(x_0) = \mathfrak{R}_{\mathcal{U}}(\mathfrak{R}_{\mathcal{W}}(x_0)|_{s_{t'}=0}).$$

1 Im äquivalenten Petri-Netz bedeutet das den Ausschluß der inhibitor-Transition.

2 Erinnern wir uns an die "Pseudoarithmetik", die das Element  $\iota$  einschließt (§2, Seite 17). Demnach gilt  $0 + \iota = 0$ . Die Addition des 0-Vektors zum  $v'$  ersetzt also sämtliche Komponenten gleich  $\iota$  durch 0 und läßt die übrigen unverändert. Im äquivalenten Petri-Netz ist das gleichbedeutend mit dem Ausschluß der inhibitor-Kante.

## 87. OFFENE FRAGEN. DISKUSSION.

Liegt der Anfangspunkt  $x_0$  nicht auf der inhibitor-Hyperebene, dann können wir zuerst die Menge der auf dieser Ebene erreichbaren Punkte unter Ausschluß der inhibitor-Transition berechnen.  $\mathfrak{R}_u(x_0)$  ist dann für  $x_0$  einzusetzen. Das ergibt:

$$\mathfrak{R}_\psi(x_0) = \mathfrak{R}_u(\mathfrak{R}_\psi(\mathfrak{R}_u(x_0))|_{s_1=0}). \quad \square$$

Sicherlich könnte man eine ähnliche, jedoch entsprechend stärker rekursive Gleichung aufstellen, falls mehrere, aber ausschließlich schwach-monotone inhibitor-Transitionen vorhanden sind.

Die obige Rekursionsgleichung beschreibt die Erreichbarkeitsmengen von Petri-Netzen (mit einer schwach-monotonen inhibitor-Transition) mit Hilfe von Erreichbarkeitsmengen gewöhnlicher Petri-Netze. Zwar ist deren Beschreibungsproblem unentscheidbar - entscheidbar hingegen ist das Erreichbarkeitsproblem. Folglich könnte man den Algorithmus, z.B. aus [16], rekursiv anwenden... - wenn da der Durchschnitt mit der inhibitor-Hyperebene nicht dazwischen läge. Schließt das aber unbedingt die Beschreibung der Erreichbarkeitsmengen ein? Auch diese Frage lassen wir hier offen. Im Hinblick auf die Semilinearität gewinnen wir dennoch das folgende Resultat:

**Korollar 7.2.** Dimensionsbezogene Semilinearitätsgrenzen sind von schwach-monotonen inhibitor-Transitionen unabhängig. □

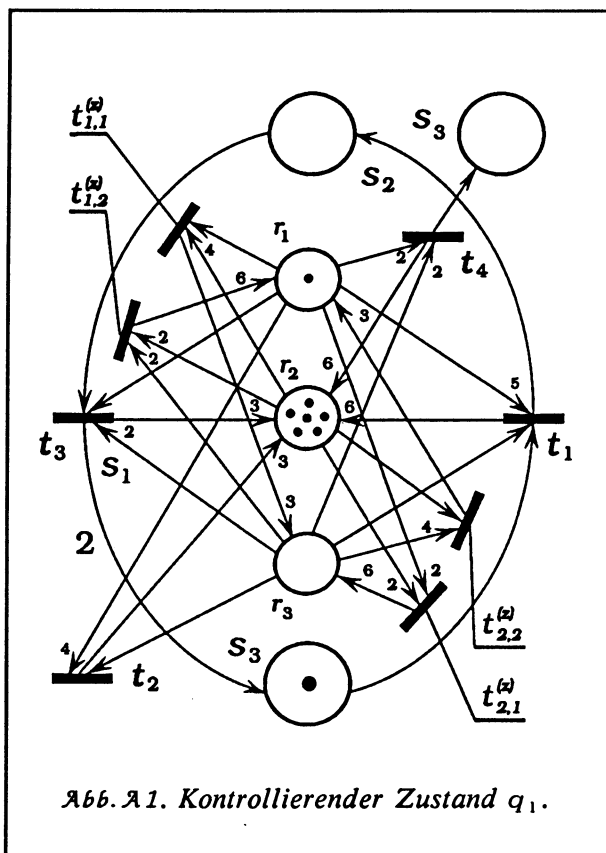
---

§7. OFFENE FRAGEN. DISKUSSION.

---

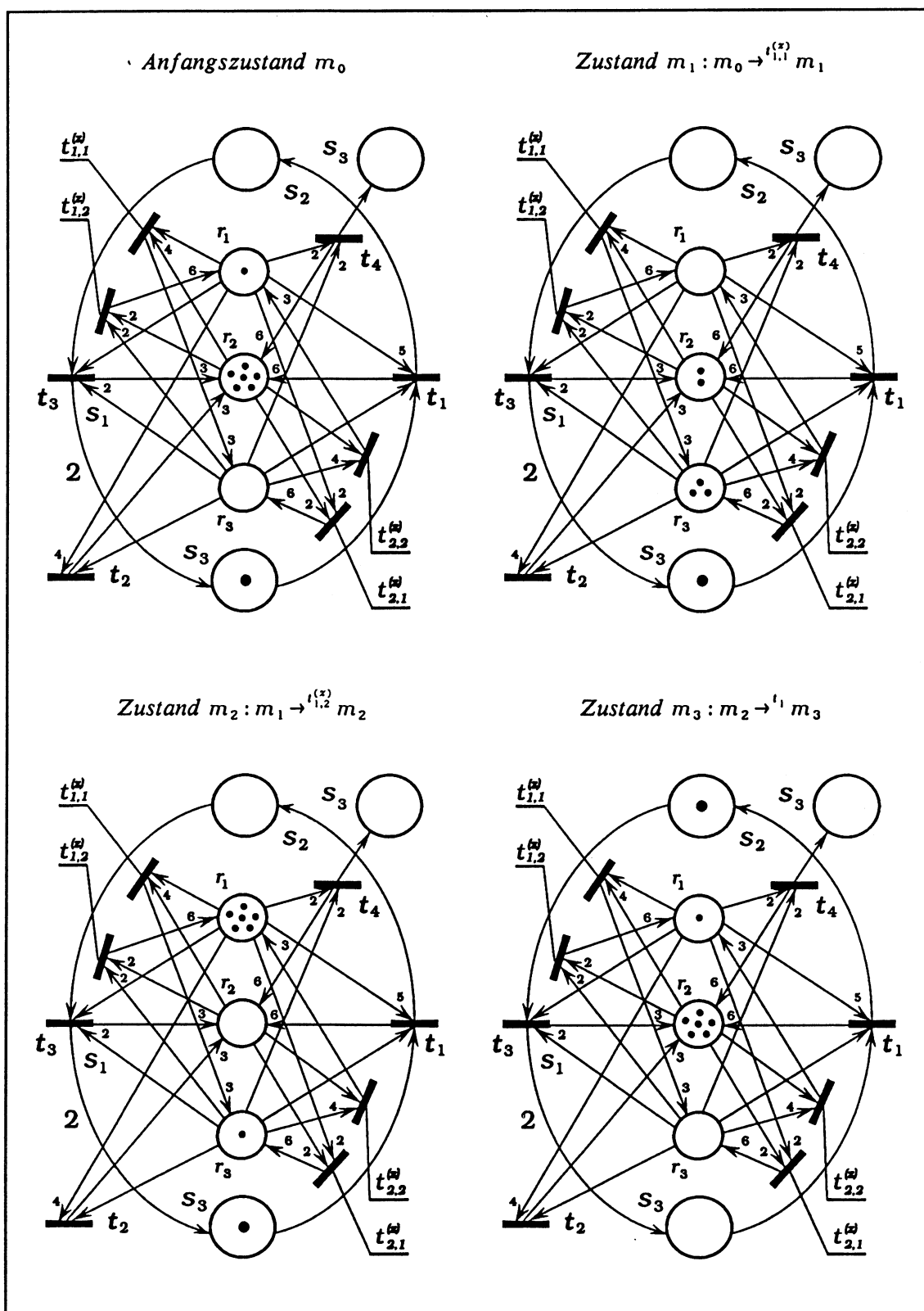
## Anhang A. SIMULATION DER KONTROLLIERENDEN ZUSTÄNDE IN GEWÖHNLICHEN VEKTOR-ADDITIONSSYSTEMEN

Kontrollierende Zustände können laut Lemma 3.3 auch in Vektor-Additionssystemen simuliert werden. Diese Simulation wollen wir hier etwas genauer schildern. Als Basis nehmen wir wieder das Petri-Netz aus dem Beispiel Abb. 5 (§3), das zwei kontrollierende Zustände enthält. Der Aufwand dieser Simulation ist beträchtlich. Erforderlich sind drei zusätzliche Stellen  $r_1, r_2, r_3$  und darüberhinaus jeweils zwei Transitionen für jeden kontrollierenden Zustand. (In unserem Beispiel:  $t_{1,1}^{(z)}$ ,  $t_{1,2}^{(z)}$  für den Zustand  $q_1$  und  $t_{2,1}^{(z)}$ ,  $t_{2,2}^{(z)}$  für  $q_2$ ). Das Petri-Netz simuliert den Zustand  $q_1$ , bzw.  $q_2$ , wenn die Markierung auf den zusätzlichen Stellen entsprechend  $m(r) = (1, 6, 0)$  für  $q_1$ , bzw.  $m(r) = (2, 3, 0)$  für  $q_2$  ist. Andere Markierungen sind als Zwischenzustände zu verstehen, die im ursprünglichen Petri-Netz nicht vorkommen. Im Anfangszustand  $m_0$  (Abb. A1) ist nur die Transition  $t_{1,1}^{(z)}$  aktiviert und nachdem sie gefeuert hat ist das die  $t_{1,2}^{(z)}$ . Wir haben dann  $m(r) = (6, 0, 1)$  und in diesem Zustand sind die Transitionen  $t_1$  und  $t_2$  aktiviert (d.h. genau diejenigen, für die  $q^*(t) = q_1$  gilt!). Feuert die erste der beiden, dann erhalten wir wieder die Ausgangsmarkierung auf den zusätzlichen Stellen. Andernfalls lautet diese Markierung  $m(r) = (2, 3, 0)$ , was mit dem kontrollierenden Zustand  $q_2$  zu identifizieren ist. Die Transitionen  $t_{1,2}^{(z)}$  und  $t_{2,1}^{(z)}$  sind jetzt blockiert und bleiben es während und nach dem Schaltvorgang  $t_{2,1}^{(z)} t_{2,2}^{(z)}$ , der dann  $m(r) = (3, 0, 2)$  liefert (Abb. A2). In diesem Zustand sind ausschließlich

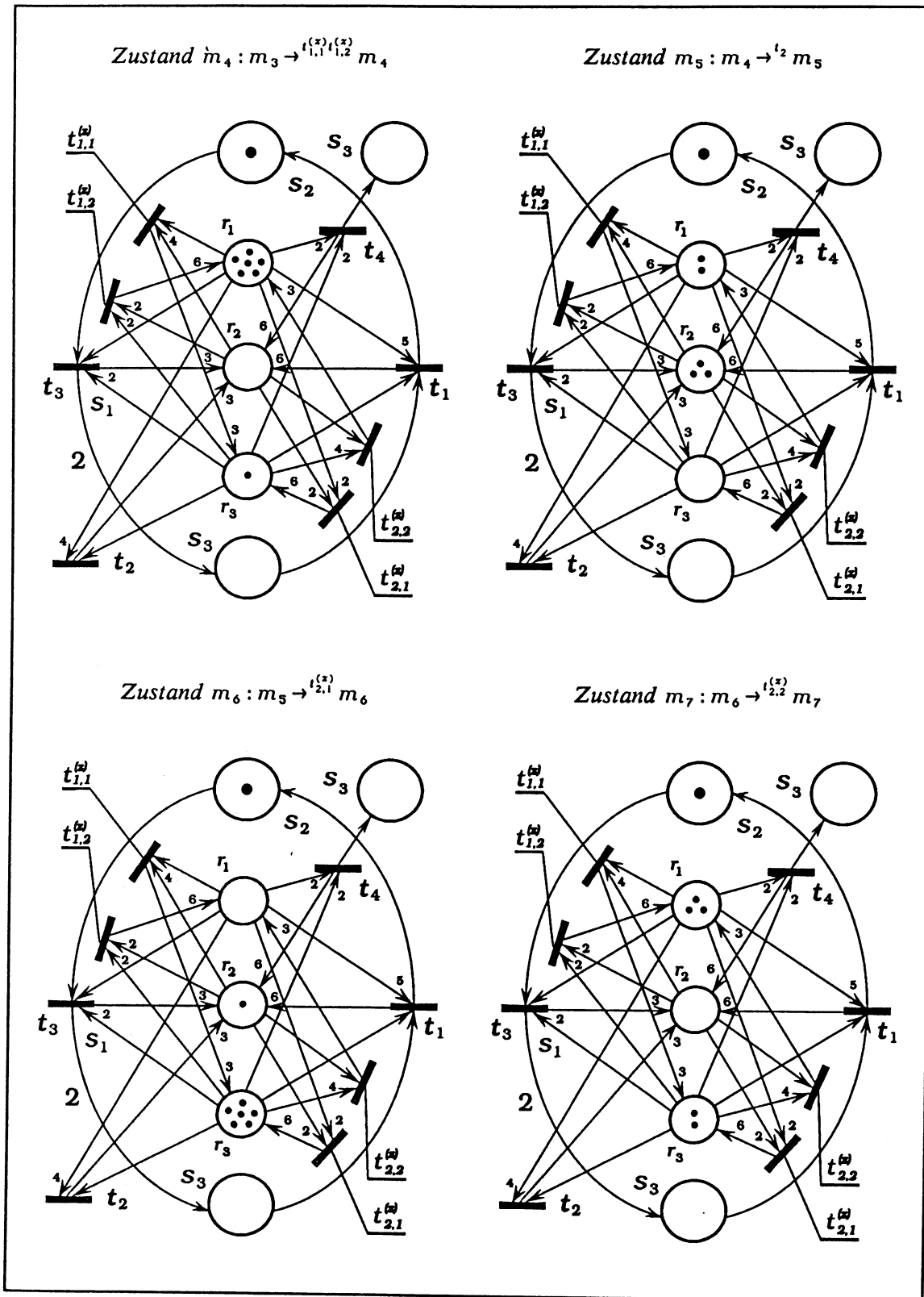




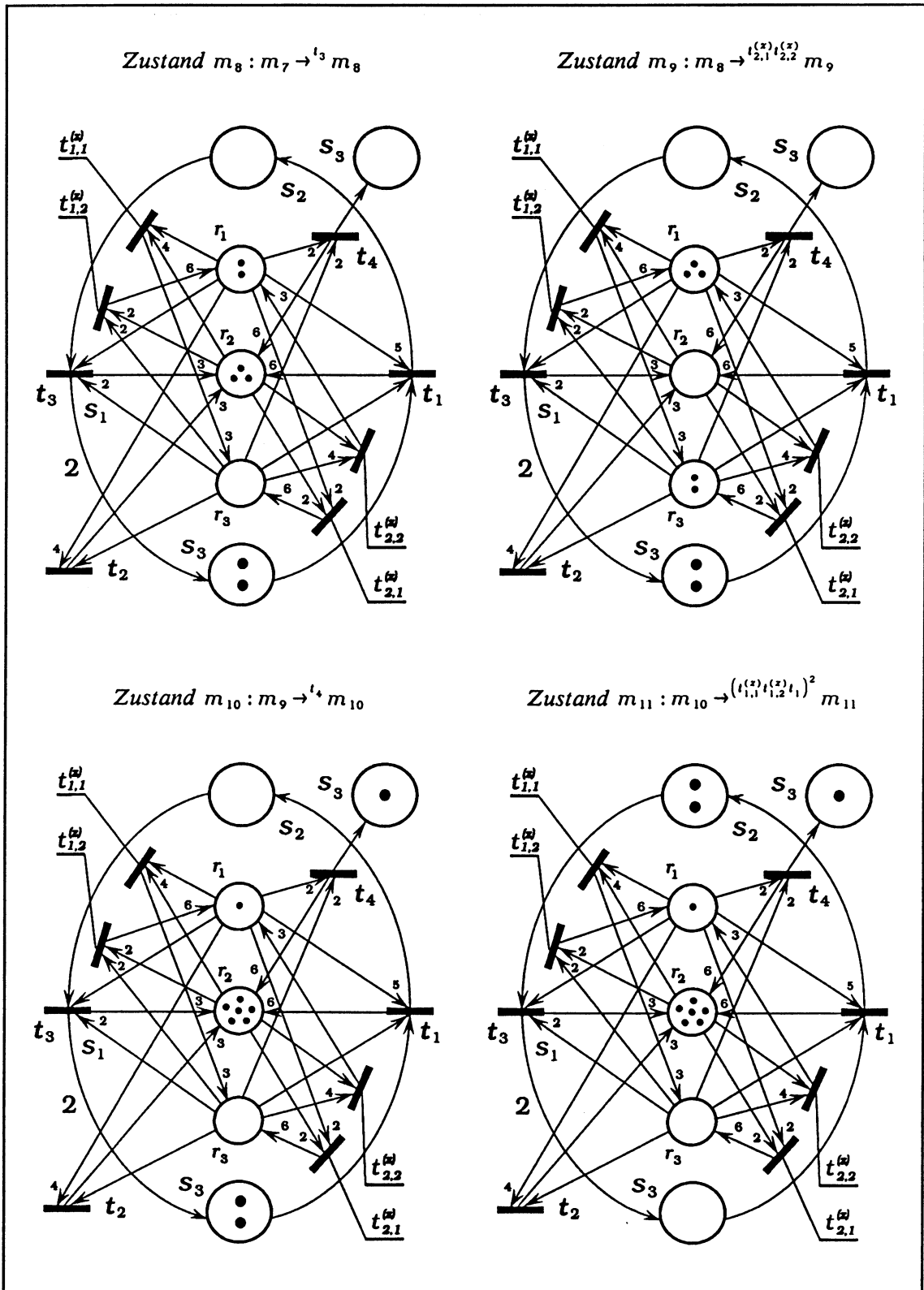
Anhang A. SIMULATION DER KONTROLLIERENDEN ZUSTÄNDE IN GEWÖHNLICHEN VEKTOR-ADDITIONSSYSTEMEN

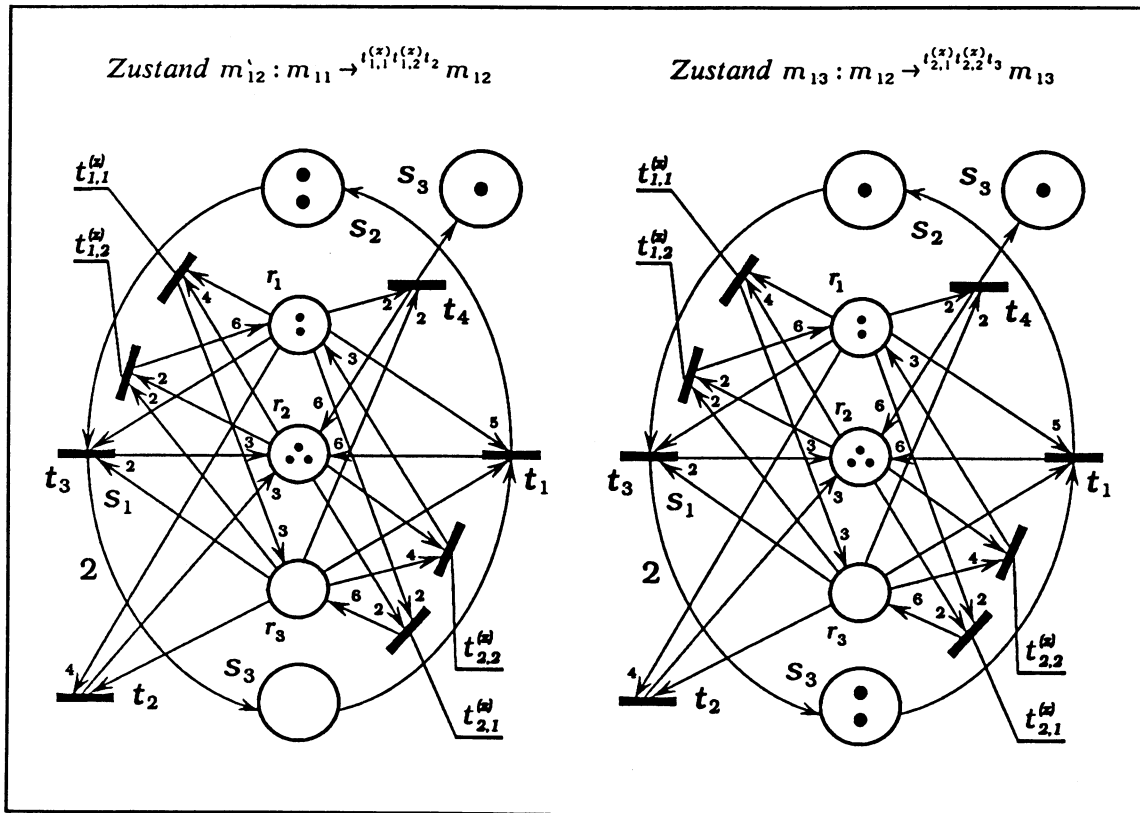


Anhang A. SIMULATION DER KONTROLLIERENDEN ZUSTÄNDE IN GEWÖHNLICHEN VEKTOR-ADDITIONSSYSTEMEN



Anhang A. SIMULATION DER KONTROLLIERENDEN ZUSTÄNDE IN GEWÖHNLICHEN VEKTOR-ADDITIONSSYSTEMEN





<b>Anhang B. LITERATURVERZEICHNIS</b>
---------------------------------------

- [1] **T. Araki, T. Kasami**, *Decidable Problems on the Strong Connectivity of Petri Net Reachability Sets*, Theoret. Comp. Sci. 4 (1977) 99-119.
- [2] **H.G. Baker**, *Rabin's Proof of the Undecidability of the Reachability Set Inclusion Problem of Vector Addition Systems*, MIT Project MAC, CSGM 79, Cambridge, Mass. (1973).
- [3] **H. Kleine-Büning, T. Lettmann, E.W. Mayr**, *Projections of Vector Addition System Reachability Sets Are Semilinear*, Theoret. Comp. Sci. 64 (1989) 343-350.
- [4] **E.W. Cardoza**, *Computational Complexity of the Word Problem for Commutative Semigroups*, MAC Technical Memorandum 67, M.I.T. (1975).
- [5] **E. Commoner**, *Deadlocks in Petri Nets*, Applied Data Research, Wakefield MA, CA 7206-3211 (1972), Applied Data Research Inc.
- [6] **J. Grabowski**, *The Decidability of Persistence for Vector Addition Systems*, IPL, 11 (1980) 20-23.
- [7] **M. Hack**, *Decidability Questions for Petri Nets*, MIT, LCS, TR 161, Cambridge, Mass., (1976).
- [8] **M. Hack**, *Petri Nets and Commutative Semigroups*, MIT Project MAC, CSGN 18, Cambridge, Mass. (1974).
- [9] **M. Hack**, *The Equality Problem for Vector Addition Systems is Undecidable*, C.S.G. Memo 121. Project MAC, M.I.T. (1975).
- [10] **J. Hopcroft, J.J. Pansiot**, *On the Reachability Problem for 5-Dimensional Vector Addition Systems*, Theoret. Comp. Sci., 8 (1979) 135-159.
- [11] **R. Karp, R. Miller**, *Parallel Program Schemata*, J. Comp. Syst. Sci. 3 (1969) 147-195.
- [12] **R.M. Keller**, *Vector Replacement Systems: a Formalism for Modelling Asynchronous Systems*, Princeton Univ., Princeton, NJ, CSL, TR 117, (1972).

- [13] S.R. Kosaraju, *Decidability of Reachability in Vector Addition Systems*, Proc. 14th Ann. ACM STOC, (1982) 267-281.
- [14] K. Lautenbach, *Exakte Bedingungen der Lebendigkeit für eine Klasse von Petri-Netzen*, GMD Bonn (St. Augustin), Bericht Nr. 82, (1973).
- [15] R. Lipton, *The Reachability Problem is Exponential-Space Hard*, Dept. Computer Science Rep. 62, Yale Univ., New Haven, CT (1976).
- [16] E.W. Mayr, *An Algorithm for the General Petri Net Reachability Problem*, SIAM J. Comput. 13,3 (1984) 441-460.
- [17] E.W. Mayr, *Persistence of Vector Replacement Systems is Decidable*, Acta Informatica, 15 (1981) 309-318.
- [18] E.W. Mayr, A.R. Meyer, *The Complexity of the Finite Containment Problem for Petri Nets*, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol 28, No. 1 (1981) 561-576.
- [19] E.W. Mayr, A.R. Meyer, *The Complexity of the Word Problems for Commutative Semigroups and Polynomial Ideals*, Advances in Mathematics 46,3 (1982), 305-329.
- [20] H. Müller, *Decidability of Reachability in Persistent Vector Replacement Systems*, Proc. 9th Symposium on MFCS (1980), LNCS 88, Springer, New York, 426-438.
- [21] C.A. Petri, *Kommunikation mit Automaten*, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn, Schriften des IMM Nr. 2, (1962).
- [22] M. Presburger, *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt*, Compute-Rendus du I. Congrès des Mathématiciens des pays, Warsaw (1930) 92-101.
- [23] G. Sacerdote, L. Tenney, *The Decidability of the Reachability Problem for Vector Addition Systems*, Proc. 9th Ann. ACM Stoc, (1977) 61-76.
- [24] D.C. Open, *A  $2^{2^{2^n}}$  Upper Bound on the Complexity of Presburger Arithmetic*, J. Comput. Systems Sci., 16 (1978) 323-332.
- [25] J. Van Leeuwen, *A Partial Solution to the Reachability Problem for Vector Addition Systems*, Sixth Ann. ACM Symp. on the Theory of Computing (1974) 303-309.